JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 31, 150–186 (1979)

Calcul d'intégrales et de dérivées en dimension infinie

PAUL KRÉE

Département de Mathématiques, Université de Paris 6, Place Jussien, Paris

Communicated by the Editors

Received May 25, 1976; revised September 14, 1976

Le but de cet article est de montrer comment la considération de systèmes projectifs de distributions vectorielles permet de faire des calculs d'intégrales et de dérivées en dimension infinie. Applications aux classes de Sobolev, à l'opérateur nombre de particules, à certaines équations aux dérivées fonctionnelles et au contrôle optimal.

Soit X un espace localement convexe séparé (e.l.c.s.) réel. La notion de probabilité cylindrique ou système projectif de probabilités sur certains quotients de X a été introduite par I. E. Segal [34]. Lorsqu'ils souhaitent introduire des classes de Lebesgue L^p relatives à une certaine probabilité cylindrique μ sur X, les physiciens théoriciens utilisent des réalisations de μ comme une vraie mesure sur un espace Ω plus grand que X; par exemple si $X = L^2(\Gamma^+)$ où Γ^+ est le cone positif de masse m de $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $n = 1, 2$ ou 3, on peut appliquer le théorème de Minlos et prendre $\Omega = \mathscr{S}'(\Gamma^+)$. Ceci a l'inconvénient de rendre difficile le calcul d'intégrales et de dérivées. Le but de cet article est de montrer sur des exemples comment la considération de systèmes projectifs de distributions vectorielles... permet des calculs effectifs d'intégrales et de dérivées.

1. NOTATIONS, DISTRIBUTIONS EN DIMENSION FINIE

(1.1) *Notations*

Soit X un e.l.c.s. réel et X' son dual topologique muni de la topologie $\sigma(X', X)$. Si $F = (A_j)_{j\in J}$ est une famille de sous-espaces fermés de codimension finie de X, on note $F^\perp = (A_j{}^\perp)_{j\in J}$ la famille des orthogonaux. On dit que F est une bonne famille si $F^\perp$ est filtrante croissante, pour l'ordre défini par l'inclusion, et si la réunion Ξ des $A_j{}^\perp$ est dense dans X'. Par exemple, $F_m = (A_i)_{i\in I}$ désigne la bonne famille de tous les sous-espaces fermés de codimension finie; et ainsi J s'identifie à une partie de I. Pour tout $i \in J$, s_i désigne la surjection canonique de X sur $X_i = X/A_i = (A_i{}^\perp)'$. Pour tout couple (i, j) d'éléments de J tels que $i \geqslant j$, la

0022-1236/79/020150–37$02.00/0

surjection canonique de X_i sur X_j est notée s_{ij}. D'où un système projectif $\Pi_F = (X_i, s_{ij})$ d'espaces vectoriels de dimension finie. Quel que soit l'ensemble E, une fonction $\varphi: X \to E$ est dite F-cylindrique, et simplement cylindrique pour $F = F_m$, si elle admet pour un certain i une factorisation

$$X \xrightarrow{s_i} X_i \longrightarrow E.$$

On dit alors que X_i est une base de φ. Si O est un ouvert non vide de X, soit $O_i = s_i(O)$. On va introduire au paragraphe suivant des systèmes cohérents de distributions vectorielles sur les ouverts O_i, i décrivant I ou J. Il convient d'abord de *fixer* i et de bien étudier certaines opérations sur les distributions vectorielles en dimension finie.

(1.2) *Dans tout ce qui suit*

l est un entier $\geqslant 0$ fixé et k est un nombre qui est entier $\geqslant 0$, ou égal éventuellement à $+\infty$. Si E est un e.v. réel, son complexifié est noté E^c, le produit tensoriel de l exemplaires de E^c est noté $\otimes_l E^c$; si $l = 0$ ce produit tensoriel est égal à $\mathbb{C}$. Le sous-espace des tenseurs symétriques (resp. antisymétriques) est noté $\odot_l E^c$ (resp. $\Lambda_l E^c$).

(1.3) *Dérivation des tenseurs distributions co-variants*

Par convention, un tel tenseur de degré l sur l'ouvert O_i de X_i est une distribution vectorielle, élément de

$$\mathscr{D}'\left(O_i, \bigotimes_l X_i'^c\right) = \mathscr{D}'(O_i) \otimes \left(\bigotimes_l X_i'^c\right).$$

L'opérateur linéaire continu de divergence

$$\mathscr{D}\left(O_i, \bigotimes_{l+1} X_i^c\right) \xrightarrow{\text{div}} \mathscr{D}\left(O_i, \bigotimes_l X_i^c\right) \tag{1.4}$$

est ainsi défini. Pour toute φ, div φ est l'application obtenue en composant la dérivée $D\varphi$ de $\varphi: O_i \to X_i'^c \otimes (\otimes_{l+1} X_i{}^c)$, avec la contraction tensorielle sur le premier indice covariant; ce qu'on écrit

$$\text{div}\, \varphi = [D\varphi] \tag{1.5}$$

L'opérateur de dérivation D des tenseurs distributions covariants de degré l sur O_i est le transposé de $-$div:

$$\mathscr{D}'\left(O_i, \bigotimes_l X_i'^c\right) \xrightarrow{D} \mathscr{D}'\left(O_i, \bigotimes_{l+1} X_i'^c\right). \tag{1.6}$$

Pour $l = 0$, on retrouve la dérivation des distributions [33] Cette dérivation prolonge la dérivation ordinaire car si dx est la restriction à O_i d'une mesure de Lebesque sur X_i et si $g \in \mathscr{C}^1(O_i, \otimes_l X_i'^c)$ il vient:

$$T = g\, dx \Rightarrow DT = (Dg)\, dx. \tag{1.7}$$

On peut aussi noter que D est l'opérateur de convolution avec la distribution vectorielle $D\delta_0$. En dimension infinie, il est commode d'utiliser une définition un peu plus générale [20] en remplacant dx par $\alpha_i\, dx$, où α_i est fixé dans $\mathscr{C}^\infty(O_i)$, α_i ne s'annulant pas sur O_i. Le raisonnement qui précède doit être modifié comme suit. Dans (1.5), D doit être remplacé par

$$\tilde{D} = \alpha_i^{-1} D \alpha_i$$

On pose alors

$$\check{\operatorname{div}}\, \varphi = [\check{D}\varphi]$$

Alors au lieu de (1.4), on considère

$$\mathscr{D}\left(O_i, \bigotimes_{l+1} X_i^c\right) \xrightarrow{\check{\operatorname{div}}} \mathscr{D}\left(O_i, \bigotimes_{l} X_i^c\right) \tag{1.9}$$

et la transposée de $-\check{\operatorname{div}}$ est l'opérateur

$$\mathscr{D}'\left(O_i, \bigotimes_{l} X_i'^c\right) \xrightarrow{\tilde{D}} \mathscr{D}'\left(O_i, \bigotimes_{l+1} X_i'^c\right). \tag{1.10}$$

Il est appelé opérateur de dérivation relative car

$$T = g(\alpha_i\, dx) \Rightarrow DT = (Dg)(\alpha_i\, dx). \tag{1.11}$$

(1.12) *Divergence des tenseurs distributions contravariants*

Par convention, un tenseur distribution contravariant de degré sur O_i est un élément de

$$\mathscr{D}'\left(O_i, \bigotimes_{l} X_i^c\right) = \mathscr{D}'(O_i) \otimes \left(\bigotimes_{l} X_i^c\right).$$

En permutant les roles de $\check{\operatorname{div}}$ et $\tilde{D}$ dans ce qui précède, on obtient au lieu de (1.9) et (1.10) les applications linéaires continues en dualité

$$\mathscr{D}\left(O_i, \bigotimes_{l} X_i'^c\right) \xrightarrow{\tilde{D}} \mathscr{D}\left(O_i, \bigotimes_{l+1} X_i'^c\right) \tag{1.13}$$

$$\mathscr{D}'\left(O_i, \bigotimes_{l} X_i^c\right) \xleftarrow{-\check{\operatorname{div}}} \mathscr{D}'\left(O_i, \bigotimes_{l+1} X_i^c\right). \tag{1.14}$$

En particulier si $\alpha_i \equiv 1$, on obtient D et $-\operatorname{div}$.

(1.15) *Polynome de dérivation*

Au polynome Q homogène de degré l sur $X_i'^c$, il peut être associé l'opérateur $Q(\check{D}/\sqrt{-1})$ de $\mathscr{D}(O_i)$ qui associe à $\varphi \in \mathscr{D}(O_i)$ la composée des applications suivantes

$$O_i \xrightarrow{(\sqrt{-1})^l \check{D}\varphi} \bigotimes_l X_i' \xrightarrow{\quad Q \quad} \mathbb{C}.$$

L'adjoint de $Q(\check{D}/\sqrt{-1})$ est un opérateur linéaire continu de l'espace $\mathscr{D}(O_i)$ des antidistributions sur O_i noté $\bar{Q}(\tilde{D}/\sqrt{-1})$. Dans le cas particulier où $\alpha_i \equiv 1$, on retrouve les applications suivantes

$$\mathscr{D}(O_i) \xrightarrow{Q(\check{D}/\sqrt{-1})} \mathscr{D}(O_i) \qquad \text{et} \qquad '\mathscr{D}(O_i) \xrightarrow{\bar{Q}(\tilde{D}/\sqrt{-1})} {}'\mathscr{D}(O_i) \tag{1.16}$$

chacune de ces applications étant l'adjointe de l'autre.

(1.17) *Tenseurs distributions symétriques ou antisymétriques*

Tout ce qui précède s'applique en particulier aux tenseurs distributions symétriques ou antisymétriques. Dans le cas antisymétrique la dérivée extérieure $\tilde{d}$ est définie en faisant suivre l'opérateur $\tilde{D}$ d'une antisymétrisation. Si de plus la structure réelle de X_i est sous-jacente à une structure complexe de X_i, la différation extérieure $\tilde{d}$ se décompose: $\tilde{d} = \tilde{d}' + \tilde{d}''$. En particulier si $\alpha \equiv 1$, on retrouve la décomposition usuelle $d = d' + d''$.

(1.18) *Distributions intégrables d'ordre* k.

Conformément à [33] chap. 6, sect. 8, on note $\mathscr{B}^k(X_i)$ l'espace des fonctions $\varphi \in \mathscr{C}^k(X_i)$ telles que pour tout l fini $\leqslant k$, la dérivée $D^l\varphi$ soit uniformément bornée à valeurs dans $\odot_l X_i'^c$. Pour tout l fini $\leqslant k$ l'espace $\mathscr{B}^0(X_i, \odot_l X_i'^c)$ des fonctions continues bornées $X_i \to \odot_l X_i'^c$ est muni de la topologie stricte [6] [8] [25]. Le dual de cet e.l.c.s. est l'espace $M(X_i, \otimes_l X_i{}^c)$ des mesures bornées: $X_i \to \odot_l X_i{}^c$. L'espace $\mathscr{B}^k(X_i)$ est muni de la topologie induite par le produit des topologies strictes, en utilisant le plongement canonique

$$\mathscr{B}^k(X_i) \to \prod_{l=0}^{k} \mathscr{B}^0\left(X_i, \bigodot_l X_i{}^c\right). \tag{1.19}$$

Le dual de $\mathscr{B}^k(X_i)$ est l'espace $\mathscr{B}'^k(X_i)$ des distributions sommes finies de dérivées d'ordres au plus k de mesures bornées sur X_i. Ce sont les distributions intégrables d'ordre au plus k. Si $k = +\infty$ on écrit simplement $\mathscr{B}(X_i)$ et $\mathscr{B}'(X_i)$.

(1.20) *Distributions a décroissance rapide*

L'espace $O_c{}^k(X_i)$ des fonctions $\mathscr{C}^k$ à croissance très lente sur X_i est l'espace des fonctions φ sur X_i s'écrivant $\varphi = (1 + \|x\|^2)^l \psi$ pour l convenable est $\psi \in \mathscr{B}^k(X_i)$;

l'espace X_i étant muni d'une structure euclidienne quelconque. Donc $O_c^k(X_i)$ est une limite inductive d'e.l.c.s.

$$O_c^k(X_i) = \lim_{\to l} [(1 + \| x \|^2)^l \mathscr{B}^k(X_i)]. \tag{1.21}$$

Le dual $O_c'^k(X_i)$ de cet espace est l'espace des distributions à décroissance rapide d'ordre au plus k. Plus précisément pour toute $T \in O_c'^k(X_i)$ et tout $l \geqslant O$, il existe des mesures $\mu_j \in M(X_i, \odot_j X_i^c)$, $j = O,\ldots, k'$, (avec k' fini $\leqslant k$) telles que

$$T = \sum_{j=0}^{k'} \operatorname{div}_j \mu_j \qquad \text{et} \qquad \int (1 + \| x \|^2)^l \, d \mid \mu_j \mid (x) < \infty \tag{1.22}$$

où $\mid \mu_j \mid$ est la variation de la mesure vectorielle μ_j. Pour $k = +\infty$, on retrouve l'espace $O_c(X_i)$ de [12] et l'espace $O_c'(X_i)$ formé par les distributions à décroissance rapide [33].

2. Protenseurs Distributions

Pour simplifier l'exposition, on prend $F = F_m$ et $O = X$. Tous les protenseurs distributions considérés sont à décroissance rapide, de manière à ce qu'ils puissent agir sur les fonctions polynomiales cylindriques. On rappelle que k et l sont fixés.

2.A. *Protenseurs distributions contravariants*

Pour i fixé dans I, on pose

$$O_c^k\left(X_i, \bigotimes_l X_i'^c\right) = O_c^k(X_i) \otimes \left(\bigotimes_l X_i'^c\right).$$

Pour tout couple (i, j) d'éléments de I, on a des injections canoniques si $i \geqslant j$

$$\bigotimes_l X_j'^c \xrightarrow{\otimes s_{ij}'^c} \bigotimes_l X_i'^c \qquad \text{et} \qquad \bigotimes_l X_i'^c \xrightarrow{\otimes s_i'^c} \bigotimes_l X'^c \tag{2.1}$$

$$\text{et} \qquad O_c^k\left(X_j, \bigotimes X_j'^c\right) \longrightarrow O_c^k\left(X_i, \bigotimes X_i'^c\right)$$

$$\varphi \mapsto \left(\bigotimes_l s_{ij}'^c\right) \circ \varphi \circ (s_{ij}) \tag{2.2}$$

On introduit la limite inductive de ces espaces

$$O_{c-cyl}^k\left(X, \bigotimes_l X'^c\right) = \lim_{\to i} O_c^k\left(X_i, \bigotimes X_i'^c\right)$$

Cette limite inductive s'identifie à un espace de fonctions cylindriques sur X, à valeurs dans $\otimes_l X'^c$, la fonction cylindrique $\tilde{\varphi}$ associée à $\varphi \in O_c{}^k(X_i, \otimes_l X_i{}^c)$ définissant une flèche rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \bigotimes\limits_l X'^c \\ \big\downarrow{\scriptstyle s_{ij}} & & \big\uparrow{\scriptstyle \otimes_l s_{ij}'^c} \\ X_i & \xrightarrow{\varphi} & \bigotimes\limits_l X_i'^c \end{array} \tag{2.3}$$

(2.4) *Définition.* L'espace $O'^k_{c-cyl}(X, l) = O'^k_{c-cyl}(X, \otimes_l X'^c)$ des protenseurs distributions d'ordre k contravariants de degré l sur X est l'espace des formes linéaires T sur $O^k_{c-cyl}(X, \otimes_l X'^c) = O^k_{c-cyl}(X, l)$ dont les restrictions à $O_c{}^k(X_i, \otimes X_i'^c)$ sont représentées pour tout $i \in I$ par des distributions $T_i \in O_c'^k(X_i, \otimes_l X_i{}^c)$.

Dans ces notations, la lettre k est omise si $k = +\infty$. Si $\tilde{\varphi} \in O^k_{c-cyl}(X, \otimes_l X'^c)$ admet pour base X_i, on pose

$$\langle T, \varphi\rangle = T(\varphi) = T_i(\varphi). \tag{2.5}$$

$$\text{ce qu'on écrit encore abusivement } \int_X \tilde{\varphi}(x)\, dT(x). \tag{2.6}$$

Si $l = 0$, on retrouve l'espace $O'^k_{c-cyl}(X)$ des prodistributions d'ordre k, à décroissance rapide. Si de plus $k = 0$, on retrouve l'espace des promesures à décroissance rapide. Si $O^k_{c-cyl}(X)$ est muni de la topologie localement convexe limite inductive des topologies des espaces $O_c'^k(X_i)$, $O'^k_{c-cyl}(X)$ apparait alors comme un dual, ce qui permet de le munir de la topologie faible. Tout ce qui précède pourrait être repris en remplacant les espaces $O_c{}^k(X_i, \otimes X_i'^c)$ et $O_c'^k(X_i, \otimes X_i{}^c)$ par les espaces $\mathscr{B}^k(X_i, \otimes_l X_i'^c)$ et $\mathscr{B}_c'^k(X_i, \otimes X_i{}^c)$. On obtiendrait alors $\mathscr{B}'^k_{cyl}(X, l) = \mathscr{B}'^k_{cyl}(X, \otimes_l X'^c)$ et son dual $\mathscr{B}'^k_{cyl}(X, l) = \mathscr{B}'^k_{cyl}(X, \otimes_l X'^c)$. C'est l'espace des protenseurs distributions bornées d'ordre k, contravariants de degré l. En particulier pour $k = 0$ et $l = 0$, l'espace $\mathscr{B}'^o_{cyl}(X)$ contient l'espace des probabilités cylindriques définies dans [34].

(2.7) *Point de vue équivalent*

On veut définir $O'^k_{c-cyl}(X, \otimes_l X'^c)$ comme un espace d'applications linéaires de source $O^k_{c-cyl}(X)$.

A cet effet, on note que

$$\begin{aligned} O^k_{c-cyl}\left(X, \bigotimes X'^c\right) &= \varinjlim_i O_c{}^k\left(X_i, \bigotimes X_i'^c\right) = \varinjlim \left[O_c{}^k(X_i) \otimes \left(\bigotimes X_i'^c\right)\right] \\ &\simeq [\varinjlim_i O_c{}^k(X_i)] \otimes \left[\varinjlim_i \left(\bigotimes_l X_i'^c\right)\right] \\ &\simeq O^k_{c-cyl}(X) \otimes \left(\bigotimes_l X'^c\right). \end{aligned}$$

Si E est un espace vectoriel, E^* désigne son dual algébrique. Vue la propriété universelle du produit tensoriel, toute $T \in O'^{k}_{c-cyl}(X, \otimes_l X'^c)$ définit une forme bilinéaire sur $O^k_{c-cyl}(X) \times (\otimes_l X'^c)$. Par conséquent T définit une application linéaire $\hat{T}$ de $O^k_{c-cyl}(X)$ dans $(\otimes_l X'^c)^*$ dont la restriction à chaque $O_c{}^k(X_i)$ est représentée par une distribution de $O_c{}^k(X_i, \otimes_l X_i{}^c)$.

(2.8) *Transformation de Fourier*

On définit la transformée de Fourier par

$$\hat{T}(\xi) = \hat{T}_x(e^{-\sqrt{-1}\langle x,\xi\rangle}). \tag{2.9}$$

C'est une fonction définie sur X', à valeurs dans $(\otimes_l X'^c)^*$.

2.B. *Protenseurs distributions covariants*

La définition est suggerée par (2.7).

(2.10) Définition. Un protenseur distribution d'ordre k covariant de degré sur X est une application linéaire T de $O^k_{c-cyl}(X)$ dans $\otimes_l X'^c$ dont la restriction à chaque $O_c{}^k(X_i)$ est représentée par $T_i \in O_c{}^k(X_i, \otimes_l X_i'^c)$.

L'ensemble de ces applications est noté $O'^{k}_{c-cvl}(X \to \otimes_l X'^c)$.

Pour toute $\tilde{\varphi} = \varphi \circ s_i \in O^k_{c-cyl}(X)$ de base X_i, on écrit

$$\langle T, \tilde{\varphi}\rangle = \langle T_i, \varphi\rangle = \int \tilde{\varphi}(x)\, dT(x). \tag{2.11}$$

Une telle application linéaire T est caractérisée par sa transformée de Fourier

$$\hat{T}(\xi) = \int e^{-\sqrt{-1}\langle x,\xi\rangle}\, dT(x) \tag{2.12}$$

à valeurs dans $\otimes_l X'^c$. Par exemple, l'application identique de X' est la transformée de Fourier du protenseur distribution covariant de degré un $(1/\sqrt{-1})\, D\delta_0$; ce protenseur est défini par la collection des distributions vectorielles $(1/\sqrt{-1})\, D\delta_0 \in O'_c(X_i, X_i'^c)$.

Si X est hilbertien réel de dimension infinie identifié à son dual, il y a une injection stricte des protenseurs distributions covariants d'un degré donné $l > 0$, dans les protenseurs distributions contravariant de degré l.

2.C. *Protenseurs mixtes. Opérations usuelles*

On peut par exemple définir les protenseurs distributions à décroissance rapide une fois covariants et une fois contravariants comme les applications linéaires

$$O_{c-cyl}(X) \to (X'^c)^* \otimes (X'^c)$$

dont les restrictions à chaque $O_c(X_i)$ sont représentées par des distributions de $O'_c(X_i, X_i'^c \otimes X_i^c)$.

En composant de telles applications linéaires avec la contraction tensorielle, on obtient des prodistributions à décroissance rapide sur X. Ce sont des protenseurs distributions sur X zéro fois contravariant et zéro fois covariant. Les opérations sur les distributions vectorielles se généralisent naturellement aux protenseurs distributions [21]. Par exemple prolongeant naturellement (1.12) et (1.13) on a une application linéaire continue

$$O_{c-cyl}\left(X, \bigotimes_{l} X'^c\right) \xrightarrow{D} O_{c-cyl}\left(X, \bigotimes_{l+1} X'^c\right) \tag{2.13}$$

dont la transposée est:

$$O_{c-cyl}\left(X, \bigotimes_{l+1} X^c\right) \xrightarrow{-\mathrm{div}} O'_{c-cyl}\left(X, \bigotimes_{l} X^c\right). \tag{2.14}$$

On a aussi une application linéaire

$$O'_{c-cyl}\left(X \to \bigotimes_{l} X'^c\right) \xrightarrow{D} O'_{c-cyl}\left(X \to \bigotimes X'^c\right). \tag{2.15}$$

Dans le cas particulier où X est hilbertien identifié à son dual, cette application peut être considérée comme la transposée de

$$O_{c-cyl}\left(X, \bigotimes_{l+1} X^c\right) \xrightarrow{-\mathrm{div}} O_{c-cyl}\left(X, \bigotimes_{l} X^c\right). \tag{2.16}$$

(2.17) *Exemple: dérivation d'une mesure gaussienne*

Soit ν(resp. ν') la promesure normale canonique sur l'espace de Hilbert réel X (resp. complexe X^c), identifié à son dual (resp. antidual):

$$\nu = (\nu_i)_i \qquad \nu' = (\nu'_i)_i .$$

La probabilité gaussienne ν_i (resp. ν'_i) sur X_i (resp. X_i^c) a pour expression si $\dim X_i = n$.

$$\nu_i = (2\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{\| x \|^2}{2}\right) dx \qquad \text{et} \qquad \nu'_i = \pi^{-n} \exp(-\| z \|^2) \cdot d^2 z \tag{2.18}$$

où dx (resp. d^2z) désigne la mesure de Lebesgue canonique sur X_i (resp. X_i^c). Soit (X, j, B) un triplet de Wiener [9]. Le calcul effectué dans [26] démonstration de la proposition 2.9., montre que la dérivée d'ordre l de la probabilité $P = j(\nu)$ est une mesure vectorielle bornée [25] sur B à valeurs dans $\odot_l^d X^c$, produit tensoriel symétrique hilbertien complété de l exemplaires de X^c. Mais ce formalisme ne convient pas pour calculer les dérivées de $f \in L^2(B)$ car même si dim $X = 1$, et même si f est continuement dérivable, on a

$$D(f\nu) \neq (Df)\,\nu. \tag{2.19}$$

C'est cette inégalité qui motive la paragraphe 4.

Remarque

Supposons B hilbertien, et j de Hilbert Schmidt. Vu [26], $D^l P$ est linéaire continue de $L_p^2(B)$ à valeurs dans $\odot^{\Delta} X^c$. En composant avec $\odot j$: $\odot^{\Delta} X^c \to \odot^{\Delta} B^c$, $D^l P$ définit une application linéaire de Hilbert Schmidt: $L_p^2(B) \to \odot^{\Delta} B^c$. Donc $D^l P$ a une densité de carré intégrable par rapport à P.

3. Calcul d'Intégrales en Dimension Infinie

La technique utilisée est celle du conditionnement. Nous pensons que l'emploi fait ici de cette technique est *intrinsequement* liée l'analyse en dimension infinie: cet emploi n'étant pas lié au langage des promesures. D'ailleurs cette technique est fondamentale dans la théorie des champs avec interaction, bien que la considération directe de probabilité sur $\mathscr{S}'(\Gamma^+)$ ou $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ permette alors d'éviter le langage des promesures.

(3.1) *Définition du relevement d'un systeme projectif de mesures*

Soit $\{E_i, B_i, \sigma_{ii'}, i \text{ et } i' \in I\}$ un système projectif d'espaces mesurables. Pour tout i, μ_i désigne une mesure positive sur l'espace mesurable (E_i, B_i) et les μ_i formant un système projectif. On suppose $\sup_i(\int d\mu_i)$ borné. Un relèvement $\{\Omega, \mathscr{T}, P, (f_i)_i\}$ de ce système projectif est la donnée d'un espace mesurable $(\Omega, \mathscr{T})$, d'une mesure positive bornée P sur $\mathscr{T}$, d'applications mesurables $f_i: \Omega \to E_i$ telles que a) $f_j = s_{ij} \circ f_i$ si $i \geqslant j$; b) $\mu_i = f_i(P)$ pour tout i; c) les f_i engendrent la tribu $\hat{\mathscr{T}}$ déduite de $\mathscr{T}$ par complétion par rapport à P.

Cette dernière condition est très importante par la suite. Dans les applications, il est intéressant de pouvoir remplacer le système projectif $\mu = (\mu_i)_{i \in I}$ par un système projectif plus petit $(\mu_j)_{j \in J}$ où J est une partie de I; et de remplacer le relèvement de μ par un relèvement plus restreint $\{\Omega, \mathscr{T}, P, (f_j)_{j \in J}\}$. Ceci n'est possible que si les f_j (j décrivant J) engendrent la tribu $\mathscr{T}$, aux ensembles P-négligeables près.

(3.2) *L'espace Hilbertien G et le systeme projectif (G_i, σ_i) de sous-espaces*

Soit G un espace Hilbertien et soit $\{G_i, i \in I\}$ une famille filtrante croissante de sous-espaces fermés de G, la réunion des G_i étant dense dans G. Si $i > i'$, $\sigma_{ii'}$ désigne la projection orthogonale et σ_i est la projection orthogonale de G sur G_i.

(3.3) LEMME DE DENSITÉ. ($1 \leqslant p < \infty$) *Pour tout i, ϕ_i désigne un sous-espace dense de la classe de Lebesgue $L^p_{\mu_i}(E_i, G_i)$. Alors pour tout relèvement de μ, $\bigcup_i \phi_i$ est un sous-espace total de $L^p(\Omega, G)$.*

En effet, toute $g \in L^p(\Omega, G)$ peut être arbitrairement approchée par:

$$g' = \sum_{k=1}^{N} 1_{A_k} a_k$$

avec $A_k \in U_i \mathscr{T}_i$ et $a_k \in G$

Il suffit alors d'approcher chaque a_k par un élément de $\bigcup_i G_i$. Pour toute $g \in L^p(\Omega, G)$ et pour tout $i \in I$, on conditionne $\sigma_i \circ g$ par f_i:

$$\varphi_i = \mathscr{E}(\sigma_i \circ g \mid f_i)$$

(3.4) *La famille $(\varphi_i)_i$ vérifie les conditions suivantes*

a) Pour tout couple (i, i') tel que $i > i'$

$$\varphi_{i'} = \mathscr{E}(\sigma_{ii'} \circ \varphi_i \mid s_{ii'})$$

(b) $$\sup_i \int \| \varphi_i(x) \|^p \, d\mu_i(x) < \infty$$

La propriété a) résulte de la propriété de transitivité des espérances conditionnelles. La propriété b) résulte du fait que le conditionnement réalise une contraction dans $L^p(\Omega, G)$ pour tout $p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$. De plus, la famille filtrée (φ_i) converge vers g dans $L^p(\Omega, G)$ si $p < \infty$ car les opérateurs continus T_i: $g \to \mathscr{E}(\sigma_i g \mid f_i)$ ont une norme égale à 1 et convergent simplement sur un sous-espace dense. Ceci conduit à la définition suivante.

(3.5) DÉFINITION DE $L_\mu{}^p(., G)$ Pour tout $p \in]1, +\infty]$, l'espace $L_\mu{}^p(., G)$ est l'espace des (φ_i) avec $\varphi_i \in L^p_{\mu_i}(E_i, G)$ vérifiant les conditions a) et b)

Cet espace peut être muni de la norme:

$$(\varphi_i) \to \sup \left(\int \| \varphi_i \|^p \, d\mu_i \right)^{1/p}$$

Si $G = \mathbb{C}$, cet espace est noté simplement $L_\mu{}^p(.)$

(3.6) THÉORÈME. On suppose $1 < p \leqslant \infty$

Pour tout relèvement $(\Omega, \mathscr{T}, P, (f_i)_i)$ de μ, l'application

$$g \xrightarrow{\beta} (\mathscr{E}(\sigma_i \circ g \mid f_i))_i$$

réalise une isométrie de $L^p(\Omega, G)$ sur $L_\mu{}^p(\,.\,, G)$. De plus la famille des $\mathscr{E}(\sigma_i \circ g \mid f_i) \circ f_i$ converge vers g dans $L^p(\Omega, G)$ faible, et dans $L^p(\Omega, G)$ fort si $p < \infty$

Démonstration. On a déjà montré que β est une isométrie: il suffit de montrer que β est surjective. Soit donc $(\varphi_i) \in L_\mu{}^p(\,.\,, G)$. Pour un relèvement quelconque de μ, on pose $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i \circ f_i$. Comme la boule unité de $L^p(\Omega, G)$ est faiblement compacte, l'ensemble filtré $(\varphi_i \circ f_i)$ admet au moins un point adhérent dans $L^p(\Omega, G)$ faible. Pour tout couple (i, j) tel que $j > i$ et pour tout B de la tribu engendré par f_i, on a

$$\int_B \varphi_i \circ f_i \, dP = \sigma_{ji} \int_B (\varphi_j \circ f_j) \, dP$$

En prenant la limite du second membre selon le filtre pour lequel $(\varphi_j \circ f_j)_j$ converge vers g dans $L^p(\Omega, G)$ faible, il vient

$$\int_B \varphi_i \circ f_i \, dP = \sigma_i \left(\int_B g \, dP \right) = \int_B (\sigma_i \circ g) \, dP$$

Donc $\varphi_i = \mathscr{E}(\sigma_i \circ g \mid f_i)$. Ceci prouve que g est unique; d'où la convergence faible.

(3.7) *Extension du théoreme* (3.6). (Y. Lejean)

L'espace $L_\mu{}^1(\,.\,, G)$ est défini comme l'espace des $(\varphi_i)_i$ équi-intégrables vérifiant (3.4.a et b) Alors pour tout relèvement β de μ, β réalise une isométrie de $L^1(\Omega, G)$ sur $L_\mu{}^1(\,.\,, G)$. Pour tout $g \in L^1(\Omega, G)$, βg converge vers g dans $L^1(\Omega, G)$ fort. Le théorème (3.6) est encore valable si G a la propriété de Radon Nikodym et si $G_i = G$ pour tout i. Ceci résulte du théorème de Chatterij concernant les martingales vectorielles.

(3.8) *Plongement des* $L^p_{\mu_i}(E_i, G_i)$ *dans* $L_\mu{}^p(\,.\,, G)$

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P, (f_i))$ un relèvement de μ et soit:

$$\tilde{L}_\mu{}^p(E_i, G_i) = \{\varphi_i \circ f_i ; \varphi_i \in L_\mu{}^p(E_i, G_i)\}$$

Soit Z_i le sous-espace de $L_\mu{}^p(\,.\,, G)$ formé par les $(\varphi_i)_i$ tels que $\varphi_j = \varphi_i \circ s_{ji}$ dès que $j \geqslant i$.

Comme β applique Z_i sur $\tilde{L}^p(E_i, G_i)$, on a un plongement de Z_i dans $L_\mu{}^p(\,.\,, G)$. Lorsque i varie, les Z_i forment un système inductif. La limite inductive $L^p_{\mu cyl}(\,.\,, G)$ de ce système est un sous-espace de $L_\mu{}^p(\,.\,, G)$. En particulier s'il existe un ensemble E et des applications s_i: $E \to E_i$ telles que $s_j = s_{ij}\, s_i$ pour $i \geqslant j$, $L^p_{\mu cyl}(\,.\,, G)$ s'identifie aux fonctions cylindriques sur E du type $\varphi_i s_i$ avec $\varphi_i \in L^p_{\mu_i}(E_i, G_i)$.

Relevements de probabilités cylindriques

Soit $\mu = (\mu_i)_{i \in I}$ une probabilité cylindrique sur l'e.l.c.s. X. Comme noté dans

[34], le théorème de S. Bochner [4] montre que μ admet le relèvement $(\Omega_0, \mathscr{T}_0, P_0, (f_i^0)_i)$ avec

$$\Omega_0 = (X')^* = \text{limite projective des espaces } X_i$$

$$f_i^0 = \text{surjection canonique de } \Omega_0 \text{ sur } X_i$$

$\mathscr{T}_0$ est la tribu cylindrique sur Ω_0: $\mathscr{T}_0$ est engendrée par les f_i^0. Si J est une partie de I telle que les $A_j (j \in J)$ forment une bonne famille, alors $\mu' = (\mu_j)_{j\in J}$ est une F-probabilité cylindrique sur X. On se propose de construire des relèvements $(\Omega, \mathscr{E}, P, (f_i))$ de μ, de manière à ce que les $f_j (j \in J)$ engendrent la complétion $\hat{\mathscr{E}}$ de $\mathscr{E}$ par rapport à P. Vu (3.6), ceci entraine que pour tout $p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ les espaces L_μ^p, $L_{\mu'}^p$, et $L^p(\Omega)$ sont *isométriques*. Ceci est très utile, car ceci permet de construire des représentations isométriques simples de $L^p(\Omega)$. On va utiliser à cet effet deux techniques fort différentes, Ω pouvant être égal à Ω_0 (prop. (3.12)) ou à un espace plus petit (prop. (3.13)).

(3.9) PROPOSITION. *Il est supposé que:*

— *le dual fort de X est métrisable, Ξ étant dense dans X fort*

— *il existe $p_0 \geqslant 1$ tel que l'application linéaire R: $\xi \to (w \to \langle \xi, w \rangle)$ soit continue de X' fort dans $L^{p_0}(\Omega_0)$.*

Alors, pour tout relevement $(\Omega, \mathscr{T}, P, (f_i)_{i\in I})$ de μ et pour tout $p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$, les trois espaces L_μ^p, $L_{\mu'}^p$, et $L^p(\Omega)$ sont isométriques.

Montrons que pour le relèvement $\{X'^*, \mathscr{T}_0, P_0, (f_i^0)\}$ de Segal de μ, $\hat{\mathscr{T}}_0$ est engendrée par les $f_j, j \in J$. Comme Ξ est un sous-espace dense de X' métrisable, pour tout x de X', il existe une suite $(x_n)_n$ de Ξ qui converge vers x. Comme R est linéaire continue

$$(Rx_n)_n \to Rx \qquad \text{dans} \quad L^{p_0}(X'^*)$$

Il existe une sous-suite $(Rx_{n'})$ qui converge vers Rx presque partout. Donc Rx est mesurable par rapport à la complétion $\hat{\mathscr{T}}'$ de la tribu $\mathscr{T}'$ engendrée par les f_j, j décrivant J. Donc toute f_i est $\hat{\mathscr{T}}'$-mesurable. Comme $\mathscr{T}_0$ est engendrée par les f_i, on a $\hat{\mathscr{T}}_0 = \hat{\mathscr{T}}'$.

Vu la définition (3.1), $\{X'^*, \mathscr{T}_0, P_0, (f_j^0)_{j\in J}\}$ est un relèvement de μ'. Vu le théorème (3.6), on a les isométries

$$L_{\mu'}^p \sim L^p(X'^*) \sim L_\mu^p$$

et L_μ^p est isométrique à $L_{\mu'}^p$.

La proposition (3.9) est démontrée car pour tout relèvement $(\Omega \ldots)$ de μ, L_μ^p est isométrique à $L^p(X'^*)$.

La démonstration de cette proposition utilise un relèvement de μ dans $\Omega = (X')^*$. La théorie des mesures de Radon permet parfois d'utiliser un espace Ω plus petit:

(3.10) PROPOSITION. *Soient deux e.l.c.s. X et Ω et soit λ une injection continue a image dense de X dans Ω; la transposée λ' de λ identifie Ω' a un sous-espace faiblement dense de X'. Soit μ une probabilité cylindrique sur X dont l'image $P = \lambda\mu$ est de Radon sur Ω. Soit $(U_j)_{j\in J}$ la famille des sous-espaces de dimension finie de X' contenus dans Ω'. Les orthogonaux $A_j = U_j^{\perp}$ dans X forment une bonne famille F. Pour tout j, $X_j = X/A_j$ est isomorphe au quotient Ω_j de Ω par l'orthogonal de X_j dans Ω; d'ou des applications continues $f_j: \Omega \to \Omega_j \sim X_j$ telles que $f_j(P) = \mu_j$ pour tout $j \in J$. Soit $\hat{\mathscr{B}}$ la tribu complétée de la tribu de Baire $\mathscr{B}$ de Ω. Alors $(\Omega, \hat{\mathscr{B}}, P, (f_j))$ est un relèvement de $\mu' = (\mu_j)_j$.*

Démonstration

Soit $\mathscr{C}$ la tribu de Ω engendrée par les f_j. Comme $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}$, il suffit de montrer que $\hat{\mathscr{B}} \subset \mathscr{C}$.

a) Pour toute partie compacte K de Ω, on a $\mathscr{C} \upharpoonright K = \mathscr{B} \upharpoonright K$. En effet; il suffit de montrer que pour toute fonction continue f sur Ω, l'intersection de $Z = f^{-1}(0)$ avec K est contenue dans $\mathscr{C} \upharpoonright K$. Comme $Z \cap K = (f \upharpoonright K)^{-1}(0)$, il suffit de montrer que toute $\varphi \in C^0(K)$ est mesurable par rapport à $\mathscr{C} \upharpoonright K$. Comme la limite simple d'une suite de fonctions mesurables est mesurable, on peut supposer que φ appartient à une sous algèbre dense A de $C^0(K)$. Il suffit de prendre pour A les restrictions à K des fonctions continues F'-cylindriques et d'appliquer le théorème de Stone Weierstrass.

b) La probabilité P de Radon est portée par une réunion dénombrable U de compacts de Ω. La thèse est démontrée car a) entraine que $\mathscr{C} \upharpoonright U = \mathscr{B} \upharpoonright U$,

(3.11) *Simplification des notations*

a) Notant φ un élément de $L_\mu{}^p$, pour tout relèvement $(\Omega \ldots)$ de μ, l'intégrale de l'élément g de $L^p(\Omega)$ associé à φ se calcule à partir de $\varphi = (\varphi_i)$. C'est pourquoi cette intégrale est écrite abusivement:

$$\int_X \varphi(x)\, d\mu(x) \tag{3.12}$$

b) De même si φ et ψ sont respectivement des éléments de $L_\mu{}^p$ et de $L_\mu^{p'}$ avec $p < \infty$, $p^{-1} + p'^{-1} = 1$, la forme bilinéaire de dualité est notée

$$\int_X \varphi(x)\, \psi(x)\, d\mu(x) \tag{3.13}$$

c) De même la norme de φ dans $L_\mu{}^p$ est notée

$$\left(\int |\varphi(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} \tag{3.14}$$

(3.15) *Quelques formules utiles*

a) On a pour $\varphi = (\varphi_i) \in L_\mu{}^p$

$$(\|\varphi\|_p)^p = \sup_i \int |\varphi_i(x)|^p \, d\mu_i(x)$$

b) Dans le cas particulier où φ est cylindrique de base X_j, on a pour tout $i \geqslant j$

$$\int |\varphi_i|^p \, d\mu_i = \int |\varphi_j \circ s_{ij}|^p \, d\mu_i = \int |\varphi_j|^p \, d\mu_j$$

D'où

$$(\|\varphi\|_p)^p = \int |\varphi_j|^p \, d\mu_j \tag{3.16}$$

c) Pour toute $\varphi \in L_\mu{}^p$ et pour tout i

$$\int_X \varphi(x) \, d\mu(x) = \int_{X_i} \varphi_i(x) \, d\mu_i(x) \tag{3.17}$$

d) On n'a pas en général une formule analogue pour le produit de deux "fonctions"

$$\varphi = (\varphi_i)_i \in L_\mu{}^p \qquad \text{et} \qquad \psi = (\psi_i)_i \in L_\mu^{p'}.$$

Cependant, dans le cas particulier où l'une des fonctions (ψ par exemple) est cylindrique de base X_j, on a

$$\int_X \varphi(x)\, \psi(x) \, d\mu(x) = \int_{X_j} \varphi_j(x)\, \psi_j(x) \, d\mu_j(x) \tag{3.18}$$

En effet pour tout relèvement $(\Omega, \mathscr{T}, P, (f_i))$ de μ, soient $g \in L^p(\Omega)$ et $h \in L^{p'}(\Omega)$ associés respectivement à φ et ψ.
Alors

$$\mathscr{E}(gh \mid f_j) = \varphi_j \psi_j$$

D'où le résultat d'après (3.18)

(3.19) *Espaces* $L_\mu{}^p(X, \otimes_l^\Delta X^c), L_\mu{}^p(X, \odot_l^\Delta X^c), L_\mu{}^p(X, \Lambda_l^\Delta X^c)$

Ces espaces s'obtiennent en prenant pour μ une probabilité cylindrique sur l'espace de Hilbert X et en prenant pour G' le produit tensoriel (resp. symétrique, resp. antisymétrique) hilbertien complété de l exemplaites du complexifié X^c de X. Pour $l = 0$, ces espaces coincident avec $L_\mu{}^p(X)$. Parfois on pose $L_\mu{}^p(X, l) = L_\mu{}^p(X, \bigodot_l^{\Delta} X^c)$. Le théorème (3.6) donne alors une représentation isométrique de certaines classes L^p vectorielles par des espaces de protenseurs mesures contravariants.

(3.20) *Plongement de $L^p_{\mu cyl}(X, G)$ dans $L_\mu{}^p(X, G)$*

Il résulte de (3.8) que $L^p_{\mu,cyl}(X, G)$ s'identifie au sous-espace des fonctions cylindriques sur X du type $\varphi_i \circ s_i = \tilde{\varphi}$ avec $\varphi_i \in L_{\mu i}(X_i, G_i)$. De plus $L^p_{\mu,cyl}(X, G)$ est isométrique à un sous-espace de $L_\mu{}^p(X, G)$. On pose

$$\int |\tilde{\varphi}(x)|^p \, d\mu(x) = (\| \tilde{\varphi} \|_{L^p(X,G)})^p$$

c'est-à-dire que $\tilde{\varphi}$ est identifiée à son image par β.

(3.21) *Développement en séries de polynomes d'Hermite*

La technique des séries de Fourier est très utile en dimension finie. Des techniques analogues existent en dimension infinie: Les notations sont celles de (2.17). L'espace X étant supposé séparable, soit (e_n) une base orthonormée de X. Pour $n \geqslant 1$, X_n(resp. $X_n{}^c$) désigne le sous-espace de X (resp. X^c) engendré par $e_1, e_2 \ldots e_n$. Comme les $X_n{}^\perp$ (resp. $X_n{}^\perp$) forment une bonne famille F_y de X (resp. $F_y{}^c$ de X^c) et comme la promesure ν sur X (resp. ν' sur X^c) vérifie les hypothèses de (3.9), on a une représentation isométrique de $L_\nu{}^2(X)$ (resp. $L^2_{\nu'}(X^c)$) par des familles cohérentes dénombrables:

$$\begin{aligned} f &= (\varphi_n) \qquad \text{avec} \quad \|f\|^2 = \sup_n \int |\varphi_n|^2 \, d\nu_n ; \\ g &= (\psi_n) \qquad \text{avec} \quad \|g\|^2 = \sup_n \int |\psi_n|^2 \, d\nu'_n . \end{aligned} \tag{3.22}$$

Comme dans [32] (resp. [27]) les polynomes de Hermite normalisés réels (resp. complexes) sont introduits

$$\begin{aligned} H_k(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (t + iu)^k \, d\nu(u); \\ H_{kl}(z, \bar{z}') &= \int_{\mathbb{C}} (z + iu)^k \, (\bar{z}' + i\bar{u})^l \, d\nu'(u). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Ces suites de polynomes admettent des fonctions génératrices

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k H_j(t)}{k!} = e^{tz - z^2/2} \quad \sum_{k \text{ et } l \geqslant 0} \frac{z^k \bar{z}'^l}{k!\, l!} H_{k,l}(\alpha, \bar{\alpha}') = e^{-z\bar{z}' + z\bar{\alpha}' + \alpha\bar{z}'} \tag{3.24}$$

Les polynomes $H_k(t)/\sqrt{k!}$ (resp. $K_{kl}(z, \bar{z})/\sqrt{k!l!}$) forment une base orthonormée de $L_\nu^2(R)$ (resp. $L_{\nu'}^2(\mathbb{C})$).
On utilise les conventions des multi-indices. Soit $k = (k_1, k_2 \cdots)$ une suite infinie d'entiers $\geqslant 0$ nulle à partir d'un certain rang. Les coordonnées de $x \in X$ (resp. $z \in X^c$) sont notées

$$x = (x_1, x_2 \cdots) \qquad z = (z_1, z_2 \cdots).$$

Si les multi-indices k et l sont nuls à partir du rang $n + 1$, on pose:

$$H_k(x) = \prod_{j=1}^{\infty} H_{k_j}(x_j); \qquad H_{k,l}(z) = \prod_{j=1}^{\infty} H_{k_j,l_j}(z_j, \bar{z}_j) \tag{3.25}$$

$$k! = \prod_{j=1}^{\infty} k_j! \qquad l! = \prod_{j=1}^{\infty} l_j! \tag{3.26}$$

Les fonctions polynomiales cylindriques $H_k/\sqrt{k!}$ (resp. $H_{k,l}/k!l!$) forment une base orthonormée de $L_\nu^2(X)$ (resp. $L_{\nu'}^2(X^c)$).
Donc, comme noté dans [32] (resp. [27]) toute $f \in L_\nu^2(X)$ (resp. toute $g \in L_{\nu'}^2(X^c)$) admet un développement:

$$f \sim \sum_k f_k H_k \qquad g \sim \sum_{k,l} g_{k,l} H_{k,l} \tag{3.27}$$

$$\text{avec} \quad \|f\|^2 = \sum_k |f_k|^2\, k! \qquad \|g\|^2 = \sum_{k,l} |g_{k,l}|^2\, k!\, l! \tag{3.28}$$

$$k! f_k = \int_X f(x)\, H_k(x)\, d\nu(x) \qquad k!\, l!\, g_{kl} = \int_{X'} g(z)\, H_{k,l}(z)\, d\nu'(z). \tag{3.29}$$

Ces intégrales peuvent etre calculées en utilisant (3.18). Si k et l sont nuls à partir du rang $n + 1$, il vient

$$\begin{aligned} k! f_k &= \int_{X_n} \varphi_n \prod_{j=1}^{n} H_{k_j}(x_j)\, d\nu_n\,; \\ k!\, l!\, g_{k,l} &= \int_{X_n{}^c} \psi_n \prod_{j=1}^{n} \bar{H}_{k_j,l_j}(z_j, \bar{z}_j)\, d\nu'_n\,. \end{aligned} \tag{3.30}$$

De meme que la technique des séries de Fourier s'étend aux distributions sur le tore, les techniques précédentes peuvent etre étendues à certaines classes de prodistributions.

Par exemple soit $'\mathscr{L}_{cyl}(X^c)$ l'espace des F —antiprodistributions à décroissance rapide $T = (T_n)$ sur X^c telles que $\hat{T}_n$ soit analytique pour tout n. On a des injections:

$$O_{c-cyl}(X^c) \to L_{\nu'}^2(X^c) \simeq {}'(L_{\nu'}^2(X^c)) \to {}'\mathscr{L}_{cyl}(X^c). \tag{3.31}$$

Alors toute T est caractérisée par les coefficients de son développement en polynomes d'Hermite complexes. Donc toute $T \in {}'\mathscr{L}_{cyl}(X^c)$ est caractérisée par la suite "doublement" infinie de ses coefficients

$$T_{kl} = \langle T \mid H_{kl} \rangle.$$

Extension naturelle aux protenseurs distributions.

4. Calcul de Dérivées en Dimension Infinie

La dérivée $\partial T/\partial x_1$ de la distribution T sur $\mathbb{R}^n$ est donnée par la formule

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \qquad \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle \tag{4.1}$$

Cette "extension" du calcul différentiel classique est utile pour l'étude des solutions faibles d'équations aux dérivées partielles. Or les équations aux dérivées fonctionnelles admettent aussi des solutions faibles: voir *h*7. Il se pose donc le problème de trouver l'analogue de (4.1) en dimension infinie. On a trouvé une formule assez différente (4.7).

(4.2) *Hypothèses* (et notations)

a) L'espace X est supposé hilbertien. Le système projectif usuel d'espaces vectoriels de dimension finie est noté $\{X_i, s_{ij}, i \text{ et } j \in I\}$

b) L'espace X est muni d'une promesure $\mu = (\mu_i)$ à décroissance rapide telle que pour tout i dans I

$$\mu_i = \alpha_i \, dx$$

avec $\alpha_i \in \mathscr{C}^\infty(X_i)$, α_i ne s'annulant pas.

c) Pour tout i et pour vecteur V de X_i, l'opérateur $\check{\partial}_v = \alpha^{-1}\partial_v \alpha_i$ envoie $\mathscr{O}_c(X_i)$ dans $\mathscr{O}_c(X_i)$

d) Pour tout couple (i, j) d'indices tels que $i \geqslant j$, on pose

$$X_i = X_j \oplus X_j' \qquad \text{avec} \quad X_j' = X_i \ominus X_j$$

Le point générique x de X_i s'écrit donc $x = x' + x''$ avec $x' \in X_j$, $x'' \in X_j'$. Il est supposé que la fonction $x \to \alpha_i(x)\,\alpha_j(x')^{-1}$ ne dépend que de x''. Par conséquent il existe $\alpha_{ij}(x'')$ telle que

$$\alpha_i(x) = \alpha_j(x')\,\alpha_{ij}(x'') \tag{4.3}$$

Ces hypothèses sont satisfaites si $\mu = \nu$.

(4.4) LEMME. *Lorsque i varie, les opérateurs*

$$O_c\left(X_i, \bigotimes_l X_i^c\right) \xrightarrow{\check{\mathrm{div}}} O_c\left(X_i, \bigotimes_{l-1} X_i^c\right)$$

sont cohérents. Ils définissent donc une application linéaire

$$O_{c-cyl}\left(X, \bigotimes_l X^c\right) \xrightarrow{\check{\mathrm{div}}} O_{c-cyl}\left(X, \bigotimes_{l-1} X^c\right)$$

appelée divergence absolue.

En d'autres termes soit (i, j) un couple d'indices tels que $i \geqslant j$. Introduisant les applications canoniques

$$X_i \xrightarrow{s_{ij}} X_j \qquad \bigotimes_{l-1} X_j^c \xrightarrow{\sigma_{ij}^{l-1}} \bigotimes_{l-1} X_i^c \qquad \bigotimes_l X_j^c \xrightarrow{\sigma_{ij}^l} \bigotimes_l X_i^c$$

alors pour tout $\psi \in \mathcal{O}_c(X_j, \otimes_l X_j^c)$, on a

$$\sigma_{ij}^{l-1}(\check{\mathrm{div}}_j\, \psi)\, s_{ij} = \check{\mathrm{div}}_i(\sigma_{ij}^l \psi s_{ij}) \tag{4.5}$$

Dans cette formule, $\check{\mathrm{div}}_j$ et $\check{\mathrm{div}}_i$ désignent respectivement les opérateurs de divergence absolue sur X_j et X_i. Il s'agit de montrer cette formule. On a

$$X_i = X_j \oplus X_j' \qquad \text{avec} \quad \dim X_i = n, \quad \dim X_j = n', \quad X_j' = X_i \ominus X_j$$

Tout point x de X_i s'écrit

$$x = (x', x'') \qquad \text{avec} \quad x' = (x_1, \ldots, x_{n'}); \quad x'' = x_{n'+1}, \ldots, x_n)$$

Les composantes de $\check{\mathrm{div}}_j\, \psi(x')$ sont

$$(\check{\mathrm{div}}_j\, \psi)_{k_2 \cdots k_l} = \sum_{k_1=1}^{n'} \alpha_j^{-1}(x')\, \partial_{k_1} \alpha_j(x')\, \psi_{k_1 \cdots k_l}(x')$$

où $k_1, \ldots, k_l$ sont compris entre 1 et n'

La fonction $\phi = \sigma_{ij}^l \psi\, s_{ij}$ applique tout $x = (x', x'')$ de X_i sur l'élément $\psi(x')$ de $\otimes_l X_j^c$, ce dernier espace étant plongé dans $\otimes_l X_i^c$. Les coordonnés de $\phi(x)$ sont donc

$$(\phi(x))_{k_1 \cdots k_l} = \begin{cases} 0 & \text{si l'un des } k_j \text{ dépasse } n' \\ \psi(x')_{k_1 \cdots k_l} & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $(\check{\mathrm{div}}_i\, \phi)\ (x)$ a pour coordonnées dans $\otimes_{l-1} X_i^c$

$$((\check{\mathrm{div}}_i\, \phi)(x)))_{k_2\cdots k_l} = \sum_{k_1=1}^{n} \alpha_j^{-1}\alpha_{ij}^{-1}\partial_{k_1}(\alpha_j\alpha_{ij}\psi_{k_1\cdots k_l}(x'))$$

où $k_2 \cdots k_l$ varient de 1 à n.

$$((\check{\mathrm{div}}_i\, \phi)(x))_{k_2\cdots k_l} = \begin{cases} 0 & \text{si l'un des } k_j \text{ dépasse n}' \\ \text{et sinon} & \displaystyle\sum_{k_1=1}^{n'} \alpha_j^{-1}\partial_{k_1}\alpha_j\psi_{k_1\cdots k_l}(x') \end{cases}$$

La relation (4.5) est donc démontrée puisqu'il y a égalité des coordonnés en tout point x de X_i.

(4.5) Corollaire. *Soit $l \geqslant 1$ et $T = (T_i)_i \in \mathcal{O}'_{c-cyl}(X, \otimes_{l-1} X^c)$. Lorsque i varie, les $\tilde{D}T_i$ forment un systeme cohérent de tenseurs distributions l fois contravariants.*

En effet, pour toute $\psi \in \mathcal{O}_c(X_j, \otimes_l X_j^c)$ et pour tout i supérieur à j, il vient

$$\begin{aligned}\langle \tilde{D}T_j, \psi\rangle &= -\langle T_j, \check{\mathrm{div}}\, \psi\rangle = -\langle T_i, \sigma_{ij}(\check{\mathrm{div}}\, \psi)\, s_{ij}\rangle \\ &= -\langle T_i, \check{\mathrm{div}}(\sigma_{ij}\psi s_{ij})\rangle = \langle \tilde{D}T_i, \sigma_{ij}\psi s_{ij}\rangle\end{aligned}$$

(4.6) *Définition de la dérivée de densité*

Pour toute $T = (T_i) \in \mathcal{O}'_{c\ cyl}(X, \otimes_{l-1} X^c)$, les tenseurs distributions $\tilde{D}T_i$ définissent un protenseur distribution appelé dérivée de densité de T et noté $\tilde{D}T$

$$\tilde{D}T \in \mathcal{O}'_{c-cyl}\left(X, \bigotimes_l X^c\right)$$

On a la formule de dualité

$$\langle \tilde{D}T, \varphi\rangle = -\langle T, \check{\mathrm{div}}\, \varphi\rangle \tag{4.7}$$

pour toute φ de $\mathcal{O}_{c\ cyl}(X, \otimes_l X^c)$

(4.8) *Itération des opérateurs $\tilde{D}$ de div*

L'opérateur $\tilde{D}$ peut etre itéré, ce qui permet de définir les dérivées de densité successives $\tilde{D}T, \tilde{D}^2T, \ldots, \tilde{D}^lT$ de toute prodistribution T à décroissance rapide. De meme, l'opérateur $\check{\mathrm{div}}$ agissant dans les fonctions cylindriques à décroissance très rapide, peut etre itéré. Ceci peut etre itéré. Ceci permet de définir $\check{\mathrm{div}}\, \varphi$, $\check{\mathrm{div}}_2\, \varphi, \ldots, \check{\mathrm{div}}_l(\varphi)$ pour toute φ de $\mathcal{O}_{c\ cyl}(X, \otimes_l X^c)$. La formule de dualité (4.7) se prolonge en

$$\langle \tilde{D}^lT, \varphi\rangle = (-1)^l \langle T, \check{\mathrm{div}}_l\, \varphi\rangle \tag{4.9}$$

(4.10) *Opérateurs de dérivation relative associés a des polynomes*

Les notations sont celles de (1.3). Pour tout polynome Q sur X homogène de degré l, soit Q_i la restriction de Q au sous-espace X_i. Il peut etre vérifié que lorsque i varie, les opérateurs différentiels

$$Q_i\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\check{D}\right) : \mathcal{O}_c(X_i) \to \mathcal{O}_c(X_i)$$

sont cohérents. Une application linéaire de $\mathcal{O}_{c\ cyl}(X)$ notée $Q(\check{D}/\sqrt{-1})$ est donc ainsi définie. Il en résulte que les adjointes

$$\bar{Q}_i\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\tilde{D}\right) : {}'\mathcal{O}_c(X_i) \to {}'\mathcal{O}_c(X_i)$$

des applications $Q_i(\check{D}/\sqrt{-1})$ définissent un opérateur linéaire de $\mathcal{O}_{c\ cyl}(X)$. Cet opérateur noté $\bar{Q}(\tilde{D}/\sqrt{-1})$ et l'opérateur $Q(\check{D}/\sqrt{-1})$ vérifient la relation d'adjonction:

$$\left\langle \bar{Q}\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\tilde{D}\right) T \mid \varphi \right\rangle = \left\langle T \mid Q\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\check{D}\right)\varphi\right\rangle \tag{4.11}$$

(4.12) *Un exemple simple* non trivial est relatif au polynome $Q_0(x) = i(x.v)$ où v est un vecteur quelconque de X. Alors pour tout $\varphi = \varphi_i \circ s_i$ de $\mathcal{O}_{c\ cyl}(X)$ il vient

$$Q_0\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\tilde{D}\right)\varphi = \left(\frac{\check{\partial}}{\partial(s_i v)}\varphi_i\right)\circ s_i$$

Posant $Q_0(\check{D}/\sqrt{-1}) = -\check{\partial}/\partial v$ et $\bar{Q}_0(\tilde{D}/\sqrt{-1}) = \tilde{\partial}/\partial v$, il vient:

$$\left\langle \frac{\tilde{\partial}}{\partial v} T \mid \varphi \right\rangle = -\left\langle T \,\middle|\, \frac{\check{\partial}}{\partial v}\varphi \right\rangle$$

L'opérateur $\tilde{\partial}/\partial v$ est l'opérateur de dérivation de densité dans la direction de v

(4.13) *Quelques cas particuliers*

a) Procourants

Si $T \in \mathcal{O}'_{c\ cyl}(O\,.\,, \Lambda_{l-1} X^c)$ a un antisymétrisé nul, alors il en est de meme de $\tilde{D}T$. On peut donc définir une dérivation extérieure

$$\mathcal{O}'_{c-cyl}\left(O, \bigwedge_{l-1} X^c\right) \xrightarrow{d} O'_{c-cyl}\left(O, \bigwedge_{l} X^c\right)$$

et un complexe de Rham.

b) Espace complexifié $X^c = X + \sqrt{-1}\, X$

Soit (A_i) la bonne famille maximale F_M de X. Alors les $A_i^c = A_i + \sqrt{-1}\, A_i$ forment une bonne famille $F_M{}^c$, et cette famille est cofinale. Donc toute pro-distribution à décroissance rapide sur X^c est caractérisée par une $F_M{}^c$ — pro-distribution. La démarche qui précède peut etre adaptée. Les opérateurs $\check{\text{div}}'$ et $\check{\text{div}}''$ peuvent etre définis relativement aux espaces $\mathcal{O}_{c\ cyl}(X^c, \otimes_l X^c)$. De meme, des opérateurs $\tilde{D}'$ et $\tilde{D}''$ peuvent etre définis entre espaces de protenseurs distributions

$$\check{\text{div}} = \check{\text{div}}' + \check{\text{div}}'' \qquad \tilde{D} = \tilde{D}' + \tilde{D}''$$

Dans le cas plus particulier des protenseurs distributions antisymétriques, les opérateurs $\tilde{D}'$ et $\tilde{D}''$ permettent de définir respectivement les opérateurs $\tilde{d}'$ et $\tilde{d}''$. Les memes considérations s'appliquent si X^c est remplacé par un espace de Hilbert complexe quelconque.

5. Classes $W^{p,s}(O, l)$ du Type Sobolev ([15]) et [19])

Soit X un espace de Hilbert réel identifié à son dual. Soit O un ouvert cylindrique de X admettant pour base un ouvert ω d'un sous-espace X_0 de dimension finie de X. Soit $F = (A_i)_{i \in I}$ la famille des sous-espaces fermés de codimension finie de X contenus dans $A_0 = X_0{}^{\perp}$. Soient s et l des entiers positifs, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, et soit $\mu = (\mu_i)$ une F-promesure sur O. Avant de définir la classe $W_\mu^{p,s}(O, l)$ de F-protenseurs mesures sur O, il faut étendre la théorie de la dérivation de densité aux ouverts cylindriques.

(5.1) *Classe $\mathcal{D}\mathcal{O}^s_{c\ cyl}(O)$ de fonctions d'épreuve*

Pour tout $i \in I$, on a

$$X_i = X/A_i \sim (X/A_0) \cdot (A_0/A_i) = X_0 \times \tilde{X}_i$$

avec $\tilde{X}_i = A_0/A_i$. Donc

$$O_i = s_i(O) = \omega \times \tilde{X}_i$$

Pour tout compact K de ω, $\mathcal{D}_K O^s_{c\ cyl}(O_i)$ désigne le sous-espace topologique de $O_c{}^s(X_0 \times \tilde{X}_i)$ formé par les φ à support dans la bande $K \times \tilde{X}_i$ de O_i. Alors l'espace

$$\mathcal{D}O_c{}^s(O_i) = \bigcup_K \mathcal{D}_K O_c{}^s(O_i)$$

est muni de la topologie limite inductive stricte. L'espace

$$\mathcal{D}O^s_{c\ cyl}(O) = \varinjlim_i \mathcal{D}O_c{}^s(O_i)$$

est muni de la topologie limite inductive: c'est un espace de fonctions F-cylindriques sur O

(5.2) *Dérivation de densité dans un ouvert cylindrique O*

Il est supposé que μ vérifie les hypothèses suivantes

— Pour tout i, $\mu_i \in \mathscr{D}O_c'^s(O_i)$ et admet une densité α_i indéfiniment dérivable strictement positive par rapport à la restriction à O_i de la mesure de Lebesgue canonique de $X_0 \times \tilde{X}_i$

— Pour tout couple(i, i') d'indices tels que $i \geqslant i'$, on note que $O_i = O_{i'} \times Y_{ii'}$ avec $Y_{ii'} = A_i/A_{i'}$. Le point générique de O_i est noté

$$x = (x', x'') \qquad \text{avec} \quad x' \in O_i\,, \quad \text{et} \quad x'' \in Y_{ii'}$$

Il est supposé qu'il existe $\alpha_{ii'} \in \mathscr{O}_c(Y_{ii'})$ telle que

$$\alpha_i(x) = \alpha_{i'}(x') \cdot \alpha_{ii'}(x'')$$

— Pour tout i et pour tout vecteur v de $X_0 \times \tilde{X}_i$, l'opérateur ∂_v envoie $\mathscr{D}O_c(O_i)$ dans $\mathscr{D}O_c(O_i)$.

Moyennant ces trois hypothèses, les raisonnements du paragraphe 4 permettent de définir l'opérateur de dérivation de densité

$$\mathscr{D}O'_{c\ cyl}(O, l) \xrightarrow{\tilde{D}} \mathscr{D}O'_{c\ cyl}(O, l+1)$$

avec $\mathscr{D}O'_{c\ cyl}(O, l) = \varinjlim \mathscr{D}O_c'^{\infty}(O_i) \otimes (\otimes_l X_i^c)$

(5.3) *Définition de $W_\mu^{p,s}(O, l)$*

C'est l'ensemble des $g\mu \in L^p(O, \odot_l^{\Delta} X^c)$ telles que

$$\tilde{D}^j(g\mu) \in L^p\left(O, \overset{\Delta}{\underset{l+j}{\odot}} X^c\right) \qquad \text{pour} \quad j = 0 \cdots s$$

C'est un espace de Banach pour la norme

$$\| g\mu \|_s = \left(\sum_{j=0}^{s} \int \| \tilde{D}^j(g\mu)\|^p \, d\mu\right)^{1/p} \tag{5.4}$$

Pour $l = 0$, la classe $W^{p,s}$ est notée $W_\mu^{p,s}(O)$

(5.5) *Remarque*

Soit J une partie de I telle que $F' = \{A_j\,, j \in J\}$ soit une bonne famille de sous-espaces de X. On peut généraliser le formalisme de la dérivation de densité aux F'-protenseurs distribution sur O. Et de meme si μ admet un relèvement $\{\Omega, \mathscr{T}, P, (f_i)_{i\in I}\}$ tel que $\mathscr{T}$ soit engendrée par les f_j(j décrivant J), la définition précédente peut etre "généralisée":

$W^{p,s}(O_{F'}, l)$ désigne l'espace des F'-protenseurs mesures $g\mu$ tels que pour $j = O, \cdots s$, la dérivée $\tilde{D}^j(g\mu)$ au sens des F'-protenseurs distributions appartiennent à $L^p(O, \overset{\triangle}{\odot}_{l+j} X^c)$.

En fait les espaces ainsi obtenus ne dépendent pas de F' et sont tous isométriques à $W_\mu^{p,s}(O, l)$. En effet, montrons par exemple:

$$W_\mu^{p,1}(O_{F'}, l) = W_\mu^{p,1}(O, l)$$

Il suffit de montrer que tout élément $g = (\varphi_j\mu_j)$ du premier membre définit un élément de meme norme du deuxième membre

Posons

$$(\psi_j\mu_j)_j = \tilde{D}(g\mu)$$

Vu le théorème 3.6., les systèmes cohérents $(\varphi_j\mu_j)_j$ et $(\psi_j\mu_j)_j$ définissent respectivement des éléments $g \in L^p(\Omega)$ et $G \in L^p(\Omega, X^c)$. Ceci permet d'étendre ces deux systèmes cohérents à l'ensemble I d'indices, en posant

$$\forall i \in I \qquad \varphi_i = \mathscr{E}(g \mid f_i) \qquad \psi_i = \mathscr{E}(\sigma_i G \mid f_i)$$

Il reste prouver que $\tilde{D}(\varphi_i\mu_i) = \psi_i\mu_i$ pour tout i. Ceci équivaut à montrer que l'on a pour tout vecteur $\mathbf{V}$ de $X_0 \times \tilde{X}_i$,

$$\bar{\partial}_v(\varphi_i\mu_i) = (\mathbf{\Psi}_i \cdot \mathbf{V})\, \mu_i$$

Utilisant l'opérateur différentiel $\bar{\partial}_v$ défini en (4.12), ceci revient à montrer que

$$\bar{\partial}_v(g\mu) = (B \cdot B)\, \mu \qquad \text{au sens des } F\text{-prodistributions.}$$

Soit V_j la projection orthogonale de V sur X_j. On a:

$$\tilde{\partial}_{v_j}(g\mu) = (\mathbf{G} \cdot \mathbf{V}_j)\, \mu$$

puisque $\tilde{D}(g\mu) = G \cdot \mu$ au sens des F'-prodistributions. Il suffit alors de faire tendre j vers l'infini pour obtenir la relation cherchée.

(5.6) *Propriétés immédiates des espaces* $W^{p,s}(O, l)$

a) On a des injections continues

$$\mathscr{D}O^s_{c\ cyl}(O) \subset W^{p,s}(O) \subset L^p(O)$$

b) Les espaces $W^{p,s}(O, l)$ sont complets.

c) Soit $1 \leqslant p < \infty$. Alors, les éléments de $W_\mu^{p,s}(O, l)$ représentés par des fonctions F cylindriques sont denses dans $W_\mu^{p,s}(O, l)$

Ceci résulte du lemme de densité (3.3).

(5.7) *Définition de $W^{p',-s}(O)$ si $1 \leqslant p < \infty$*

Si $W_0^{p,s}(O)$ désigne l'adhérence de $\mathscr{D}O^s_{c-cyl}(O)$ dans $W^{p,s}(O)$, on a vu (5.6.a) des injections continues à image dense

$$\mathscr{D}O^s_{c-cyl}(O) \subset W_0^{p,s}(O) \subset L^p(O) \tag{5.8}$$

ainsi, le dual $W^{p',-s}(O)$ de $W_0^{p,s}(O)$ donne lieu à des injections continues à image dense:

$$L^{p'}(O) \subset W^{p',-s}(O) \subset \mathscr{D}O'^s_{c-cyl}(O) \tag{5.9}$$

Ainsi, $W^{p',-s}(O)$ s'identifie à un espace de F-prodistributions.

(5.10) *Conséquences de la théorie de la dérivation de densité*

a) Soient j et s deux entiers tels que $O \leqslant j \leqslant s$. Alors les applications linéaires continues

$$\begin{array}{cc} W_0^{p,s}(O) \to W_0^{p,s-j}(O, j) & W^{p',-s+j}(O, j) \to W^{p',-s}(O) \\ g\mu \mapsto \tilde{D}^j(g\mu) & T \mapsto (-1)^j \, \check{\operatorname{div}}_j \, T \end{array} \tag{5.11}$$

sont en dualité

b) Toute $T \in W^{p',-s}(O)$ peut s'écrire

$$T = \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \, \check{\operatorname{div}}_j(l_j\mu) \qquad \text{avec} \quad l_j \in L^{p'}\left(O, \overset{\triangle}{\underset{j}{\odot}} X^c\right) \tag{5.12}$$

Prouvons par exemple b). L'application linéaire

$$W_0^{p,s}(O) \to \prod_{j=0}^{s} L^p\left(O, \overset{\triangle}{\underset{j}{\odot}} X^c\right)$$

réalise un isomorphisme de l'espace de Banach $W_0^{p,s}(O)$ sur un sous-espace d'un produit d'espaces de Banach. Vu le théorème de Hahn Banach, il existe des $l_j \in L^{p'}(O, \odot_j^{\triangle} X^c)$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}O_{c-cyl}(O) \qquad \langle T, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^{s} \langle l_j\mu, D^j\varphi \rangle$$

Or $\langle l_j\mu, D^j\varphi\rangle = (-1)^j \langle \check{\mathrm{div}}_j(l_j\mu), \varphi\rangle$. Ceci montre que l'on a (5.12) au sens des F-prodistributions. On peut encore définir

$$W^{p,+\infty}(O) = \bigcap_s W^{p,s}(O) \qquad \text{et} \qquad W^{p',-\infty}(O) = \bigcup_s W^{p',-s}(O) \quad (5.13)$$

(5.14) *Espaces* $K^s(X)$

Un cas particulier important est celui où

$$O = X \qquad \mu = \nu \qquad p = 2$$

Pour tout s entier relatif ou égal à $\pm\infty$, on pose $K^s(X) = W^{2,s}(X)$. Ces espaces ont été définis pour s entier $\geqslant O$ par Frolov [7] et L. Gross [11] en utilisant une technique de complétion. En fait un emploi combiné du théorème (3.6) et des méthodes du paragraphe 4 conduit à une réprésentation très concrète, directe et élémentaire de *tout* élément de $K^s(X)$.

Proposition. *Rapportons l'espace de Hilbert séparable réel* X *a une base orthonormée quelconque et utilisons les notations* (3.21). *Soit* s *un entier positif. Alors*:

(a) $K^s(\mathbb{R}^n)$ *est l'espace des* $\varphi_n \in L^2(\mathbb{R}^n, \nu_n)$ *dont toutes les dérivées distributions d'ordre au plus* s *appartiennent a* $L^2(\mathbb{R}^n, \nu)$ *et l'on pose*

$$\| \varphi_n \|_s = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant s} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} \varphi_n \right\|^2 \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \right)^{1/2}$$

(b) $K^s(X)$ *est l'espace des suites cohérentes* $\varphi = (\varphi_n)_n$ *d'éléments* φ_n *de* $L^2(\mathbb{R}^n, \nu_n)$ *tels que*

$$\| \varphi \| = \sup_n \| \varphi_n \|_s < \infty.$$

Ce résultat est le point de départ de [15].

6. Prodistributions et Fonctions Holomorphes

(6.1) Soit X un espace de Hilbert réel séparable et soit $X^c = X \otimes \sqrt{-1}\, X$ le complexifié de X.

(6.2) *Définitions de* $PH^p(X^c)$ *et de* $F^p(X^c)$

Soit $1 < p < \infty$. Soit $PH^p(X^c)$ la famille des fonctions numériques g sur X^c dont les restrictions aux complexifiées des droites de X sont harmoniques et dont les restrictions g_i aux complexifiés X_i^c des sous-espaces X_i de dimension finie de X, sont continues et vérifient

$$\| g \|^p = \sup_i \left(\int_{X_i^c} | g_i(z)|^p \, d\nu_i'(z) \right)^{1/p} < \infty \tag{6.3}$$

Soit $F^p(X^c)$ l'espace des fonctions numériques g sur X^c dont les restrictions g_i sont holomorphes et vérifient (6.3).

(6.4) PROPOSITION. *L'application identique réalise une isométrie de $PH^p(X^c)$ sur un sous-espace fermé de $L^p_{\nu'}(X^c)$. De meme, $F^p(X^c)$ est un sous-espace fermé de $L^p_{\nu'}(X^c)$.*

Démonstration

Vue la définition (3.5) de $L^p_{\nu'}(X^c)$, toute $g \in PH^p(X^c)$ définit un élément $(g_i)_i$ de $L^p_{\nu'}(X^c)$ si les fonctions g_i sont cohérentes. Vérifions cette cohérence. Soit (i, j) un couple d'indices tels que $i \geqslant j$, $\dim X_j = p$. Les points génériques de X_j et X_i^c sont notés respectivement

$$x = (x', x'') \in X_j \otimes X_j^\perp$$
$$z = (z', z'') \in X_j^c \otimes (X_j^\perp)^c$$

L'égalité $s^c_{ij}(g_i \nu_i') = g_j \nu_j'$ signifie que pour presque tout $z' \in X_j^c$,

$$g_j(z') = \int g_i(z', z'') \, d\nu_j''(z'') \tag{*}$$

où ν_j' désigne la probabilité normale canonique sur $(X_j^\perp)^c$. Rapportant $X_j^\perp$ à une base orthonormée et utilisant les coordonnées polaires correspondantes, * équivaut à

$$g_i(z', 0) = \pi^{-n+p} \int g_i(z', r_{p+1}e^{i\theta_{p+1}}, \ldots, r_n e^{i\theta_n}) \prod_{j=p+1}^{n} (e^{-r_j^2} r_j \, dr_j \, d\theta_j)$$

l'intégrale étant étendue aux $r_j > O$ et aux $\lambda_j \in [O, 2\pi[$. Cette relation résulte de la propriété de la moyenne pour g_i. Soit $(g^k)_k$ une suite de Cauchy dans $PH^p(X^c)$. Pour tout i, $(g_i^k)_k$ est une suite de Cauchy dans $PH^p(X_i^c)$. Donc $(g_i^k)_k$ converge vers $g_i \in PH^p(X_i^c)$. Or $(g_i)_i \in PH^p(X^c)$; ainsi $PH^p(X^c)$ est un sous-espace complet, donc fermé de $L^p_{\nu'}(X^c)$.

De meme $F^p(X^c)$ est un sous-espace fermé de $L^p_{\nu'}(X^c)$ parce que sur un espace complexe de dimension finie, le sous-espace de $L^p_{\nu'}(\mathbb{C}^n)$ formé par les fonctions holomorphes est fermé.

(6.5) *Propriété de noyau reproduisant.* a) Soit g quelconque dans $F^p(X^c)$ Alors pour tout $z \in X^c$

$$g(z) = \int e^{z\bar{z}'} g(z')\, d\nu'(z') \tag{6.6}$$

b) Pour tout $p (1 < p < \infty)$, toute $g \in F^p(X^c)$ est holomorphe.

c) Pour $p = 2$, on pose $F(X^c) = F^2(X^c)$

Alors $F(X^c)$ est isométrique à l'espace des fonctions g entières sur X^c, dont les dérivées à l'origine sont du type Hilbert Schmidt et vérifient

$$\| g \| = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\| D^k g(O) \|^2}{k!} \right)^{1/2} \tag{6.7}$$

Démonstration

La fonction cylindrique $e^{\bar{z}}$: $z' \to e^{\bar{z}z'}$ et définie sur X^c appartient à $F^{p'}(X^c)$ avec $p^{-1} + p'^{-1} = 1$. Le deuxième membre de (6.6) peut etre écrit $\langle e_z \mid g \rangle$ l'anti-dualité étant celle entre $L^{p'}_{\nu'}$ et $L^p_{\nu'}$. Comme la fonction e^z est cylindrique, le deuxième membre de (6.6) est égal à

$$\int e^{z\bar{z}'} g_i(z')\, d\nu'_i(z')$$

où g_i est la restriction de g au sous-espace de dimension 1 engendré par z. Donc pour montrer (6.6) il peut etre supposé que $\dim X = 1$. Alors (6.6) se montre en remarquant que chaque membre est une fonction analytique de z, et que ces deux fonctions ont memes dérivées à l'origine.

b) Vu (3.16), la norme de $e^{\bar{z}}$ dans $L^{p'}_{\nu'}(X^c)$ est uniformément bornée pour $|z| \leqslant R$. L'inégalité de Holder peut alors etre appliquée à (6.6); et toute $g \in F^p(X^c)$ est bornée sur toutes les boules de X^c. Il en résulte que toute $g \in F^p(X^c)$ est holomorphe sur X^c.

c) La propriété à démontrer est vraie en dimension finie. Ceci entraine que cette propriété est vraie en dimension infinie car pour toute $g \in F(X^c)$

$$\| g \|^2 = \sup_i \int | g_i |^2\, d\nu'_i = \sup_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\| D^k g_i(O) \|^2}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\| D^k g(O) \|^2}{k!}$$

(6.8) *Remarques*

a) Si X est de dimension infinie, la propriété de noyau reproduisant (6.6) n'est pas vraie pour tout z dans l'espace Ω où ν' est réalisée comme vraie mesure, mais seulement pour $z \in X^c$. Donc l'axiomatique de [3] n'est pas applicable en dimension infinie.

b) Dans [5], T.A.W. Dwyer a montré que la transformation de Fourier

Borel réalise un isomorphisme de l'antidual de $F(X^c)$ sur $F(X^c)$. La proposition (6.5) permet d'interpréter simplement ce résultat. En effet vu (6.4), $F(X^c)$ est isomorphe à son antidual, le produit scalaire d'antidualité étant induit par le produit scalaire de $L^2_{\nu'}(X^c)$ et la relation (6.6) montre que la transformation de Fourier Borel coincide avec l'opérateur identique de $F(X^c)$.

c) Rapportant X à une base orthonormée. Alors les fonctions $z^k(k!)^{-1/2}$ forment lorsque n varie et lorsque $k = (k_1, \ldots k_n)$ décrit l'ensemble des multi-indices d'ordre n, une base orthonormée de $F(X^c)$. Il est clair que l'application linéaire continue $\theta: L_\nu^2(X) \to F(X^c)$ appliquant $H_k(x)/\sqrt{k!}$ sur $z^k/\sqrt{k!}$ (pour n et k variables) est une isométrie. Il est facile de voir que, $\theta\varphi$ a l'expression suivante:

$$(\theta\varphi)(z) = \int_X e^{-(1/2)z^2+zq}\varphi(q)\, d\nu(q); \text{ voir [20]} \tag{6.8}$$

L'isométrie θ est équivalente à une isométrie construite dans [34], appliquant $L_\nu^2(X)$ sur l'espace de Fock des physiciens:

$$F = \bigoplus_{n=0}^{\infty}\left(\overset{\triangle}{\bigodot_n} X^c\right)$$

En effet, (6.5.c) montre que F est isométrique à $F(X^c)$.

L'interprétation de F comme un espace de fonction holomorphes apparait dans [0] en dimension finie, et dans [1], [35], [2] en dimension infinie.

Remarques sur l'opérateur $\bar\partial = \tilde d''$.

Soit (X^c, j, B) un triplet de Wiener. Par une adaptation des méthodes d'analyse en dimension infinie de L. Gross, et de méthodes de cohomologie à croissance de H. Skoda, C. J. Henrich [13] a réussi à résoudre l'équation $\bar\partial f = g$, pour g continue à croissance lente sur B; il trouve f continue à croissance lente sur H. En adaptant les méthodes L^2 de L. Hormander, Coeuré et Raboin (à paraitre dans un mémoire de la S.M.F. consacré au Colloque de Géométrie de Lyon -1975-), ont résolu $\bar\partial f = g$ avec un second membre plus général: g appartenant à une classe vectorielle $L^2_{\nu'}$. Ceci laisse penser que la solution f d'Henrich se prolonge en fait à B. On voudrait simplement noter que la technique (3.21) permet de résoudre très simplement le $\bar\partial$ pour des seconds membres encore plus généraux.

En effet, l'opérateur $\bar\partial$ est diagonalisé dans la base des $H_{k,l}$. D'autre part, les calculs formels qui ont permis à Henrich de construire ses noyaux sont en fait des calculs de transformées de Fourier de protenseurs distributions.

Domaine de l'opérateur N^m pour tout entier $m > 0$

L'opérateur N nombre de particules transforme $\varphi \in F(X^c)$ en

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot D^k\varphi(O, z^k)/k!.$$

Donc

$$D(N^m) = \left\{\varphi \in F(X^c);\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^{2m}\,\|D^k\varphi(O)\|^2}{k!} < \infty\right\}.$$

Un résultat annoncé dans [19], et prouvé dans [15] montre qu'en représentation de Wiener-Segal, le domaine de N^m est *exactement* l'espace de Sobolev $K^{2m}(X)$ des $\varphi \in L^2(X)$ dont les dérivées (distributions) jusqu'à l'ordre $2m$, appartiennent à $L^2(X)$. Or les méthodes usuelles permettent seulement de trouver *une partie* du domaine de $D(N)$: voir [32].

7. Solutions Faibles d'Équations aux Dérivées Fonctionnelles (e.d.f.)

La théorie des distributions est commode pour l'étude de problèmes aux limites ou de Cauchy relatifs à des équations aux dérivées partielles car elle permet souvent d'associer à un opérateur différentiel un opérateur *fermé*. L'objet de ce paragraphe est de noter que les méthodes du présent article permettent des applications analogues aux e.d.f.

(7.1) Pour simplifier l'exposé, on considèrera toujours la situation suivante, les espaces vectoriels considérés étant réels

a) Pour les problèmes stationnaires, on prend

$$X = l^2 = \left\{x \mid x = \sum_{1}^{\infty} x_n e_n\ ;\ \sum x_n^2 < \infty\right\}$$

muni de la promesure normale canonique. Soit O_∞ un ouvert cylindrique de X dont la base O'_N est dans le sous-espace engendré par $e_1, \ldots, e_N$. La bonne famille est $\{X^N, X^{N+1} \cdots\}$ où X^j a pour base orthonormée $e_j, e_{j+1} \cdots$ On suppose que O'_N a une frontière Γ'_N orientable et $\mathscr{C}^\infty$ pour des atlas finis. La frontière de O_∞ est notée Γ_∞. On note ν' la restriction de la promesure ν à O_∞.

Soit $\{\sigma_{N+1}, \sigma_{N+2} \cdots\}$ une suite de carré sommable de nombres strictement positifs et l'on pose

$$l^{2,N}_{-\sigma} = \left\{\sum_{N+1}^{\infty} x_n e_n\ ;\ \sum_{N+1}^{\infty} \sigma_n^2 x_n^2 < \infty\right\}.$$

L'injection canonique de $O'_N \times X^{N+1}$ dans $\Omega' = O'_N \times l^{2,N}_{-\sigma}$ est notée j'. On pose $P' = j'(\nu')$; c'est une mesure sur Ω'. Pour $n \geqslant N$, on note O_n l'image de O_∞ par la surjection canonique s_n de X sur le sous-espace X_n engendré par $e_1 \cdots e_n$. Les classes d'applications Lusin mesurables: $\Omega' \to O_n$ sont notées $f'_N, f'_{N+1}, \ldots$

b) Pour les problèmes d'évolution on prend $X = \mathbb{R} \otimes l^2$ de point générique (t, x). Soit $O = I \times O_\infty$ avec $I =]O, T[$. On a une injection canonique

$j = Id(I) \times j'$ de $I \times O_\infty$ dans $\Omega = I \times \Omega'$, muni de la mesure $\mu = dt \otimes P'$. Les classes compatibles d'applications Lusin mesurables: $\Omega \to I \times O_n$ sont notées f_n avec $f_n = Id(I) \times f_n'$.

7.A. *Un problème de Dirichlet linéaire*

On se donne des fonctions a_{ij} sur Ω' définissant une fonction Lusin mesurable essentiellement bornée

$$a(w) = (a_{ij}(w))_{ij}$$

de Ω' à valeurs dans l'ensemble $A_s(l^2)$ les opérateurs symétriques bornés de l^2 et l'on suppose que les opérateurs $a(w)$ dominent presque partout C fois l'identité de l^2:

$$\exists E > 0, \qquad \forall(\xi_1, \ldots, \xi_n \cdots) \in l^2 \qquad \sum_{ij} a_{ij}(w)\, \xi_i \xi_j \geqslant C \sum_j \xi_j^2.$$

Soit d une fonction bornée mesurable sur Ω' essentiellement supérieure à une constante strictement positive. On va donner un sens puis résoudre le

(7.2) *Probleme*

Etant donnée une "fonction" h sur O_∞, trouver une fonction g sur O_∞ telle que

$$Ag = h \text{ dans } O_\infty \text{ avec } Ag = -\textstyle\sum_{ij} \breve{\partial}_i(a_{ij}\partial_j g) + dg;\ g = 0 \text{ sur } \partial O_\infty .$$

Comme en dimension finie, on réalise la condition aux limites homogènes en imposant à la solution g d'appartenir à $K_0^1(O_\infty)$. Il suffit alors de considérer $A_1 = -\sum_{ij} \breve{\partial}_i(b_{ij}\partial_j g)$ comme le composé de trois opérateurs linéaires continus

— l'opérateur $\tilde{D}$: $K_0^1 \to L^2(O_\infty, 1)$

— l'opérateur β: $g \to [a \circ g]$, de $L^2(O_\infty, 1)$.

— l'opérateur $-$ div opérant de $L^2(O_\infty, 1)$ dans $K^{-1}(O_\infty)$.

L'opérateur A est strictement positif car pour tout g de $K_0^1(O_\infty)$:

$$\begin{aligned}(Ag, g) &= -(\operatorname{div}(a \operatorname{grad} g), g) + (bg, g)\\ &= (a \operatorname{grad} g, \operatorname{grad} g) + \int bg^2\, dP_1\\ &\geqslant C \int \|\operatorname{grad} g\|^2\, dP_1 + C \int g^2\, dP = C(\|g\|_1)^2\end{aligned}$$

Vu le lemme de Visik Lax Milgram, le problème (7.2) admet une solution unique dans $K_0^1(O_\infty)$ pour tout k fixé dans $K^{-1}(O_\infty)$.

7.B. *Equation parabolique linéaire*

On se donne deux fonctions Lusin mesurables $b(t, w)$ et $d(t, w)$ définies sur $\Omega = I \times \Omega'$, essentiellement bornées et essentiellement minorées par une constante strictement positive: b est à valeurs dans $\mathscr{L}_s(l^2)$ et d est à valeurs réelles. En appliquant le procédé utilisé pour définir A, on définit pour presque tout t dans $]O, T[$ un opérateur linéaire continu coercif $A(t)$ de $V = K_0^1(O_\infty)$ dans $V' = K^{-1}(O_\infty)$. On pose $H = L^2_{v'}(O_\infty)$ et l'on applique les résultats de [31] montrant l'existence et l'unicité de la solution u du problème parabolique:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \dot{\mathbf{u}}(t) + A(t)\,u(t) = f(t) \qquad \text{si} \quad 0 < t < T \\ &\text{(b)} \quad u(0) = u_0 \end{aligned} \tag{7.3}$$

avec (f, u_0) donné dans $E = L^2(I, V') \oplus H$ et u inconnu dans:

$$W = \{u \in L^2(I, V), \dot{u} \in L^2(I, V')\}.$$

L'équation (7.3.b) est prise au sens des distributions vectorielles sur I, a valeurs dans V'. Signalons que la démonstration évoquée ci-après de l'existence et de l'unicité est commode pour l'étude d'approximations numériques, du controle optimal, du filtrage. On montre d'abord que tout élément de W est représenté par une fonction continue définie sur $[O, T]$, à valeurs dans H, ce qui donne un sens à l'équation (7.3.b). On introduit ensuite l'opérateur non borné (P) de E dans E' de domaine

$$D_p = \{\mathbf{u} = (u, u(O));\ u \in W\}$$

tel que $P\mathbf{u} = (\dot{u} + Au, u(O))$ pour tout $\mathbf{u}$ de D_p.

On voit que (P) est fermé, à domaine dense, strictement positif, ce qui entraine déjà l'unicité. Le transposé $(P)'$ de (P) est l'opérateur de E dans E', de domaine:

$$D_{p'} = \{\mathbf{v} = (v, \alpha);\ v \in W \text{ tel que } v(T) = 0;\ \alpha \in H\}$$

et tel que $P'\mathbf{v} = (-\dot{v} + A'v, \alpha - v(O))$ pour tout $\mathbf{v}$ de $D_{p'}$.

On vérifie finalement que $(P)'$ est à domaine dense et strictement positif, ce qui permet de montrer l'existence en utilisant le théorème de Hahn-Banach.

Voir dans [20] la résolution de problèmes pour des e.d.f. non linéaires.

8. Solution d'un Problème de J. L. Lions [30]

Il s'agit du problème de la détermination du controle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées fonctionnelles. Les résultats qui précèdent permettent d'appliquer à ces systèmes les méthodes générales de la théorie du controle et de résoudre ce problème. On présente ces méthodes en suivant le mode d'exposition de [23].

(8.1) *Cadre général*

Dans ce paragraphe, tous les espaces vectoriels considérés sont réels. Nous considérons un système gouverné par une équation linéaire:

$$Ay = f \tag{8.2}$$

où A est un isomorphisme de l'espace de Banach Y sur l'espace F; f est l'entrée du système et y est l'état du système correspondant à f. On modifie ce système en introduisant une observation dépendant linéairement de l'état et en ajoutant un controle u. Plus précisément, on introduit deux nouveaux espaces de Banach U et Z, deux applications linéaires B: $U \to F$, C: $Y \to Z$ et deux opérateurs symétriques positifs M: $Z \to Z'$ et N: $U \to U'$.

$$\begin{tikzcd} Z' & Z \arrow[l, "M"'] & \\ & Y \arrow[u, "C"'] \arrow[r, "A"] & F \\ & U' & U \arrow[l, "N"'] \arrow[u, "B"'] \end{tikzcd} \tag{8.3}$$

On introduit un point z_d de Z appelé observation désirée et un convexe fermé U_a de U appelé ensemble des controles admissibles. *L'équation d'état* du système controlé s'écrit:

$$Ay = f + Bu \tag{8.4}$$

où f est donné dans F. Le problème est de trouver u dans U_a, de facon à minimiser la somme $J(u)$ du cout du controle u et du cout de l'erreur d'observation $Cy - z_d$ correspondant à ce controle.

$$J(u) = \tfrac{1}{2}(Nu, u) + \tfrac{1}{2}(M(Cy - z_d), Cy - z_d) \tag{8.5}$$

On suppose que N est strictement positif et que U est un espace de Hilbert.

(8.6) *Forme générale du système déterminant le controle optimal*

On peut trouver une norme hilbertienne $\|\cdot\|'$ sur U équivalente à la norme de U et u_0 dans U, tels que:

$$J(u) = \| u - u_0 \|'^2 + \text{constante}$$

d'où l'existence et l'unicité du controle optimal, c'est-à-dire du point u_1 de U_a où la fonctionnelle J atteint son minimum. Le controle optimal u_1 est caractérisé par la condition:

$$\forall\, u \in U_a\,; \qquad (J'(u_1), u - u_1) \geqslant 0$$

Or la dérivée $J'(u)$ de J au point u est telle que:

$$\Delta u \in U \qquad (J'(u), \Delta u) = (Nu, \Delta u) + (M(Cy - z_d), C\Delta y)$$

Or de (8.4) il résulte que $A\Delta y = B\Delta u$.

D'où : $(J'(u), \Delta u) = (Nu, \Delta u) + (M(Cy - z_d), CA^{-1}B\Delta u)$

et : $J'(u) = Nu + B'p$

où $p \in F'$ est solution de l'équation duale :

$$A'p = C'M(Cy - z_d) \tag{8.7}$$

Finalement, on a le schéma suivant complétant (8.3) :

$$\begin{tikzcd}
Z' \arrow[dd, "C'"'] & Z \arrow[l, "M"'] & \\
& Y \arrow[u, "C"'] \arrow[r, "A"] & F \\
Y' & F' \arrow[l, "A'"'] \arrow[d, "B'"] & \\
& U' & U \arrow[l, "N"'] \arrow[uu, "B"']
\end{tikzcd} \tag{8.8}$$

et le controle optimal u_1 est caractérisé par le système formé par l'équation d'état (8.4), l'équation duale (8.7) et par l'inéquation :

$$\forall v \in U_a \qquad (Nu_1 + B'p, v - u_1) \geqslant 0 \tag{8.9}$$

(8.10) *Observation réguliere*

On se limite dès lors au cas, très fréquent dans les applications, où A est défini par un opérateur non nécessairement borné $(A) = (D_A, A)$ d'un espace de Hilbert E sur son dual E'. Plus précisément, on suppose:

— le domaine D_A de A est dense dans E

— le domaine D_T du transposé (T) de (A) est dense dans E

— les opérateurs (A) et (T) réalisent des isomorphismes de leur domaine, muni de la norme du graphe, sur E'.

Or, le transposé A' de l'isomorphisme A de D_A, muni de la norme du graphe, sur E', est un isomorphisme de E sur $(D_A)'$. Cet isomorphisme prolonge A' et l'on a le schéma:

$$\begin{array}{c}
E \supset D_A \xrightarrow{A} E' \\
(D_A)' \supset E' \xleftarrow[A']{} D_T \subset E
\end{array} \tag{8.11}$$

où l'on a introduit la transposée de l'injection dans E de D_A muni de la norme du graphe.

Posons

$$g = C'M(Cy - z_d) \tag{8.12}$$

On a $g \in (D_A)' = Y'$. On introduit alors un espace vectoriel X compris entre E et $(D_A)'$, tel que pour tout g de X, l'équation $A'p = g$ puisse etre considérée comme l'équation d'état d'un nouveau système physique appelé système adjoint. L'équation $A'p = g$ est appelée alors équation d'état adjointe et p est l'état adjoint.

On suppose que le système à controler est tel que :

$$Im(C'M) \subset X \tag{8.13}$$

On dit alors que l'observation est régulière. Dans ces conditions, le controle optimal est déterminé par l'équation d'état (8.4), l'équation d'état adjointe (8.7) et par l'inéquation (8.9).

(8.14) *Exemples*

a) L'équation d'état $Ay = f$ est un isomorphisme coercif de l'espace de Hilbert $E = K_0^1(O_\infty)$ sur son dual E', cet isomorphisme étant associé à un problème aux limites elliptique. Dans ces conditions, l'équation d'état adjointe est aussi un isomorphisme coercif de E sur E'; elle est également associée à un problème aux limites elliptique. L'observation est toujours régulière. Par exemple, on peut controler un système gouverné par l'équation aux dérivées fonctionnelles (7.2) en prenant un controle dans E', B étant l'application identique de E', une observation dans $L^2(O_\infty)$, C étant l'injection de E dans $L^2(O_\infty)$, le coût étant :

$$J(u) = \tfrac{1}{2} \| u \|^2 + \tfrac{1}{2} \| y - z_d \|^2_{L^2(O_\infty)}$$

Dans le cas du problème parabolique (7.3), on peut prendre pour X l'ensemble des formes linéaires g sur D_A du type:

$$\mathbf{w} = (w, w(O)) \to \int_0^T (w(t), g_0(t))\, dt + (w(T), g_1) \tag{8.15}$$

le couple (g_0, g_1) décrivant E'. En effet, pour un tel g, l'unique solution $\mathbf{x} = (x, \alpha)$ dans E de $A'x = g$ est telle que pour tout $\mathbf{w} = (w, w(O))$ dans D_p, on ait $(\mathbf{x}, P\mathbf{w}) = (g, \mathbf{w})$, soit :

$$\int_0^T (x(t), \dot{w}(t) + A(t)\, w(t))\, dt + (\alpha, w(O)) = \int (w(t), g_0(t))\, dt + (w(T), g_1)$$

En intégrant par parties $\int(x(t), \dot{w}(t))\,dt$, on voit que cette identité équivaut au système :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & -\dot{x}(t) + A'(t)\,x(t) = g_0(t) \\ \text{b)} & x(T) = g_1 \\ \text{c)} & \alpha = x(0) \end{array} \tag{8.16}$$

L'inconnue α est déterminée par la dernière relation lorsque $x(0)$ est connu, c'est-à-dire lorsque le système formé par a) et b) est résolu. On peut donc négliger c) et l'équation d'état adjointe est équivalente au système (8.16-a) et -b)), c'est-à-dire au problème de Cauchy, rétrograde.

(8.17) *Voyons des exemples de controle de systemes gouvernés par une équation parabolique avec g du type* (8.15)

a) Dans le cas d'une observation terminale de la solution $y(t)$ du problème de Cauchy direct, on a :

$$C\colon \mathbf{w} \to w(T); \qquad Z = Z' = H; \qquad M = Id(H), \qquad z_d \text{ fixé dans } H$$

Alors g est tel que pour tout $\mathbf{w}$ dans D_A :

$$(g, \mathbf{w}) = (C'M(Cy - z_d), \mathbf{w}) = (M(Cy - z_d), C\mathbf{w}) = y(T) - z_d\,,\, w(T)$$

Donc g est du type (8.15) avec $g_0 = 0$ et $g_1 = y(T) - z_d$

b) Dans le cas d'une observation distribuée, on a :

$$C\colon \mathbf{w} \to w; \qquad Z = Z' = L^2(I, H); \qquad M = Id(Z); \qquad z_d \text{ fixé dans } Z.$$

On trouve alors g du type (8.15) avec $g_0 = y - z_d$ et $g_1 = 0$. Le controle d'un système gouverné par une équation hyperbolique conduit à des équations identiques à celles qui viennent d'etre explicitées dans le cas parabolique si l'on écrit l'équation sous forme d'un système différentiel du premier ordre entier. On peut utiliser à cet effet le formalisme des équations différentielles positives de [24].

Note added in proof. (a) The extension problem given in Section 6 has been solved by B. Lascar (Thesis, November 1978, to appear). (b) Techniques of Section 4 have been extended by P. Paclet (Thesis, January 1979, to appear) to "nonproduct" measures. (c) Recent results ("Seminaire 1976–1977 d'e.d.p. en dim infinie," edited by the Poincaré Institute) show that the cylindrical techniques of the present paper are in fact a particular case of more general nuclear techniques. In this way, some functional methods concerning Bose and Fermi fields can be studied rigorously.

BIBLIOGRAPHIE

0. V. BARGMANN, On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, I, *Comm. Pure Appl. Math.* **14** (1961), 187–214.
1. V. BARGMANN, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **48** (1962), 199.
2. F. A. BEREZIN, "The Method of Second Quantization," Academic Press, New York, 1966.
3. F. A. BEREZIN, Covariant and contravariant symbols of operators, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **36**, No. 5 (1972); Traduit dans *Math. USSR-Izv.* **6**, No. 5 (1972), 1117–1151.
4. S. BOCHNER, "Harmonic Analysis and the Theory of Probability," Univ. of California Press (1959).
5. T. A. W. DWYER, III, Partial differential equation in Fisher. Fock spaces for the Hilbert–Schmidt holomorphy type, Bull. *Amer. Math. Soc.* **77**, No. 5 (1971), 725–730.
6. D. H. FREMLIN, D. J. H. GARLING, ET R. G. HAYDON, Bounded measures on topological spaces, *Proc. London Math. Soc.* (3) **25** (1972), 115–136.
7. N. N. FROLOV, On a coercive inequality for an elliptic operator in infinitely many independent variables (trad.), *Mat. Sb.* **90**, No. 3 (132) (1973), 395–406.
8. D. J. H. GARLING, A generalized form of inductive limit topology for vector spaces, *Proc. London Math. Soc.* (3) **14** (1964), 1–28.
9. L. GROSS, Abstract Wiener spaces, *in* "Proc. Fifth Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability, 1965."
10. L. GROSS, Potential theory in Hilbert space, *J. Functional Analysis* **1** (1967), 123–181.
11. L. GROSS, Logarithmic Sobolev inequality, *Amer. J. Math.* **97** (1975), 1061–1093.
12. A. GROTHENDIECK, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, *Mem. Amer. Math. Soc.* **16** (1955).
13. C. J. HENRICH, The equation $\bar{\partial} f = g$ with polynomial growth on a Hilbert space, *Duke Math. J.* **40**, No. 2 (1973), 279–306.
14. P. KRÉE ET R. RACZKA, Kernels and symbols of operators in quantum field theory, *Ann. Inst. H. Poincaré*, Sect. A, to appear.
15. M. KRÉE, Théorème de trace en dimension infinie, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A* **279** (1974), 157–160.
16. P. KRÉE, Courants et courants cylindriques sur des variétés de dimension infinie, *in* "Proc. of the Conf. in Oberwolfach (août 1971) ISNM," Vol. 20, Birkhauser–Verlag, Bâle/Stuttgart, 1972.
17. P. KRÉE, Utilisation des distributions pour l'étude des équations aux dérivées partielles en dimension infinie, Exposé multigraphié au séminaire J. Leray, Collège de France, janvier 1973.
18. P. KRÉE, Exemples d'utilisation de la théorie des distributions et des fonctionnelles linéaires sur les espaces de Hilbert, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série A* **278** (1974), 335–337.
19. P. KRÉE, Application des méthodes variationnelles aux équations aux dérivées partielles en dimension infinie, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A* **278** (1974), 753–755.
20. P. KRÉE, Exposés au séminaire Lelong, Lectures Notes in Mathematics, No. 410, Springer–Verlag, 1972–1973; No. 474, 1973–1974.
21. P. KRÉE, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles en dimension infinie et les applications à la physique, *Ann. Inst. H. Poincaré* (1974–1975).
22. P. KRÉE, Application des méthodes variationnelles aux équations de convolution, *J. Math. Pures Appl.* **51** (1972), 295–329.

23. P. KRÉE, Quelques résultats sur la théorie des systèmes régis par des e.d.p., *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **272** (1971), 1049–1052.
24. P. KRÉE, "Abstract and Computational Study of Positive Linear Equations of Mathematical Physics," T.R. No. 70–74, Dept. of System Science, UCLA, 1970.
25. P. KRÉE, Mesures de Radon vectorielles sur des espaces complètement réguliers, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A* (1975).
26. B. LASCAR, Propriétés locales d'espaces du type Sobolev en dimension infinie, Exposé 11 dans référence 21.
27. B. LASCAR, Une C.N.S. d'ellipticité ..., *Comm. Partial Differential Equations* **2**(1) (1977), 31–67.
28. P. KRISTENSEN, L. MEJLBO, AND E. THUE POULSEN. Tempered distributions in infinitely many dimensions, I, *Comm. Math. Phys.* **1** (1965), 175–214; II, *Math. Scand.* **14** (1964), 129–150.
29. J. L. LIONS, Contröle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles," Dunod, Paris, 1968.
30. J. L. LIONS, Leçon inaugurale au Collège de France, décembre 1973.
31. J. L. LIONS ET E. MAGENES, Problèmes aux limites non homogènes et applications," Vol. 1, Dunod, Paris, 1968.
32. M. A. PIECH, The Ornstein–Uhlenbeck Semi-group in a infinite dimensional L^2 Setting, *J. Functional Analysis* **18** (1975), 271–285.
33. L. SCHWARTZ, "Théorie des distributions" Tome 1 et 2, Hermann, Paris, 1951.
34. I. E. SEGAL, Tensor algebra over Hilbert spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **81** (1956), 106–134.
35. I. E. SEGAL, Mathematical characterisation of the physical vacuum, III, *J. Math.* **6** (1962), 500–523.